

TDP015 Grunder i matematik och logik

Dugga 1: Rekursion och induktion

Namn och LiU-ID:

Låt en talföljd vara definierad av

$$a_n = n(n + 1).$$

Använd induktion för att visa att

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

gäller för alla heltal $n \geq 1$. Ditt bevis ska ha med alla tre ”rubriker” (enligt strukturen i manuskriptet). Visa tydligt var du använder induktionsantagandet och redovisa samtliga uträkningar.

Lösningsförslag

Bevis

Induktion över n .

Bassteg

För $n = 1$ får vi:

$$s_1 = a_1 = 1 \cdot 2 = 2$$

Högerled:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$$

Alltså gäller påståendet för $n = 1$.

Induktionsantagande

Antag att formeln gäller för $n = k \geq 1$, dvs:

$$s_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Induktionssteg

Vi ska visa att det gäller för $n = k + 1$.

Vi har:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

Sätt in induktionsantagandet:

$$s_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

Skriv om den andra termen:

$$s_{k+1} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + \frac{3(k+1)(k+2)}{3}$$

Faktorisera:

$$s_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Alltså gäller formeln även för $n = k + 1$.