

TDP015 Grunder i matematik och logik

Dugga 1: Rekursion och induktion

Namn och LiU-ID:

Använd induktion för att visa att följande gäller för en aritmetisk summa för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Ditt bevis ska ha med alla tre ”rubriker” (enligt strukturen i manuskriptet). Visa tydligt var du använder induktionsantagandet och redovisa samtliga uträkningar. Kom ihåg att $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Lösning

Bevis: Induktion över n .

Basfall: $s_1 = \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 = 1(a_1 + a_1)/2 = a_1$.

Induktionssteg: Låt $k \geq 1$. Jag antar att påståendet gäller då $n = k$. Nu visar jag att påståendet gäller då $n = k + 1$, dvs. att

$$s_{k+1} = \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2}.$$

Jag förenklar termen till vänster om likhetstecknet:

$$\begin{aligned} \text{VL} = s_{k+1} &= s_k + a_{k+1} \stackrel{\text{IA}}{=} \frac{k(a_1 + a_k) + 2a_{k+1}}{2} = \frac{ka_1 + ka_k + 2a_{k+1}}{2} \\ &= \frac{ka_1 + k(a_1 + (k-1)d) + 2(a_1 + kd)}{2} = \frac{ka_1 + ka_1 + k^2d - kd + 2a_1 + 2kd}{2} \\ &= \frac{ka_1 + ka_1 + k^2d + 2a_1 + kd}{2}. \end{aligned}$$

Jag förenklar termen till höger om likhetstecknet:

$$\begin{aligned}\text{HL} &= \frac{(k+1)(a_1 + a_{k+1})}{2} = \frac{ka_1 + a_1 + ka_{k+1} + a_{k+1}}{2} \\ &= \frac{ka_1 + a_1 + k(a_1 + kd) + a_1 + kd}{2} = \frac{ka_1 + a_1 + ka_1 + k^2d + a_1 + kd}{2}.\end{aligned}$$

Termerna är alltså lika.