

# TDP015 Grunder i matematik och logik

## Tentamen 2025-05-28 kl 14.00-18.00

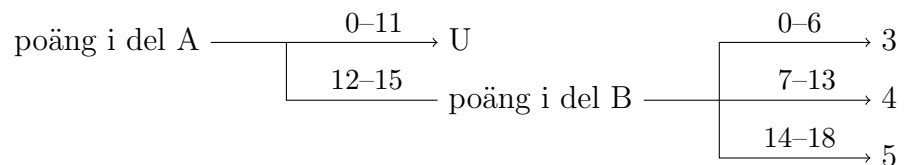
Examinator: Jose M. Peña

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

**Del A** består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram. Helt okommenterade svar ger dock i regel 0 poäng.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

**Del B** består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.**

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



**Tillåtna hjälpmedel:** Miniräknare med tomt minne.

**Lycka till!**

# 1 Del A

## 1.1 Rekursion och induktion

Använd induktion för att visa att följande gäller för en aritmetisk summa för alla naturliga tal  $n \geq 1$ :

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

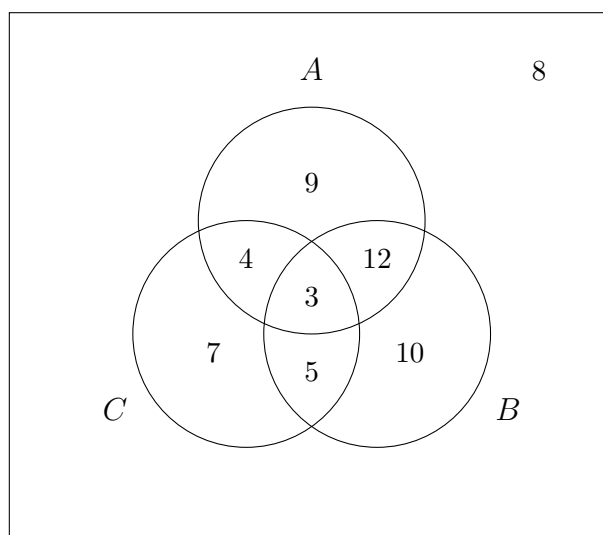
Ditt bevis ska ha med alla tre "rubriker" (enligt strukturen i manuskriptet). Visa tydligt var du använder induktionsantagandet och redovisa samtliga uträkningar. Kom ihåg att  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ .

## 1.2 Logik och mängdlära

1. Ställ upp sanningsvärdestabeller för följande satser och avgör därigenom om satserna är logiskt ekvivalenta. Skriv en kolumn för varje delsats.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \quad p \leftrightarrow q \quad (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

2. Betrakta mängden  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 5\}$ . Ställ upp en tabell som anger antalet delmängder till  $A$  med kardinalitet  $k$ , för alla  $k \leq |A|$ .
3. Figuren nedan är ett venndiagram för tre mängder  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Talen i figuren anger antalet element i vardera sektor av diagrammet. Bestäm antalet element i  $A \cap B$  och i  $B \setminus (A \cup C)$ .



### 1.3 Talteori

1. Ange alla (positiva) delare till talet 42. Ringa in de delare som är primtal.
2. En analog klocka visar femton minuter över åtta. Vad visar samma klocka om 123 timmar? och om 735 minuter?
3. Beräkna den största gemensamma delaren till  $a = 588$  och  $b = 438$  med hjälp av Euklides algoritm. Redovisa utförligt.

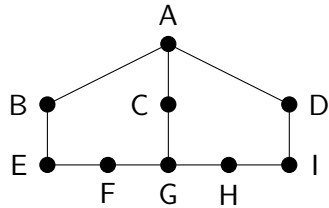
## 1.4 Kombinatorik och sannolikhetslära

1. Ett visst användarnamn ska bestå av fyra tecken. De tillåtna tecknen är de tio siffrorna 0 till och med 9 samt 20 bokstäver ur det engelska alfabetet (endast små bokstäver).
  - (a) Hur många olika användarnamn kan man skapa med dessa tecken?
  - (b) Hur många kan man skapa om första tecknet ska vara en bokstav?
2. Från en grupp på åtta personer ska tre olika personer väljas. På hur många sätt kan detta göras
  - (a) om ordningsföljden är väsentlig?
  - (b) om ordningsföljden är oväsentlig?
3. En påse innehåller två mynt: ett vanligt mynt och ett som hamnar på krona 80% av fallen. Du drar slumpmässigt ett mynt ur påsen och kastar det i luften.
  - (a) Hur stor är sannolikheten att myntet visar krona när det landar?
  - (b) När myntet landar visar det krona. Hur stor är sannolikheten att du kastade det manipulerade myntet?

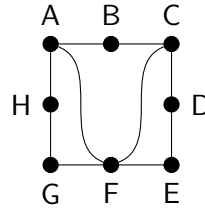
## 1.5 Grafteori

1. Ange en Eulerväg genom grafen eller skriv "finns ej".

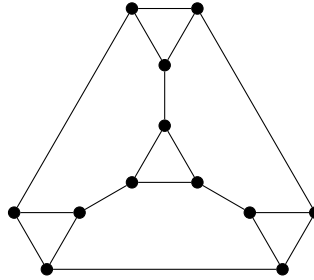
(a)



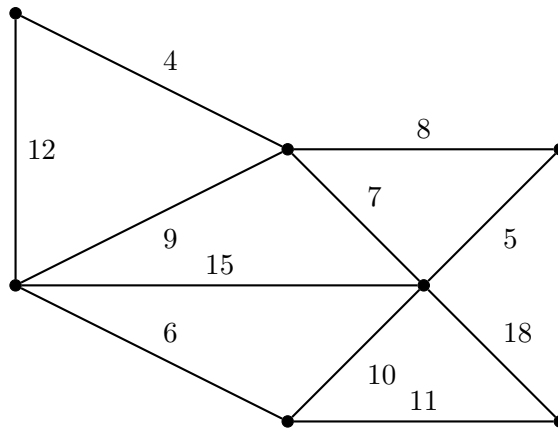
(b)



2. Rita in en Hamiltoncykel i grafen.



3. Ange ett minimalt uppspannande träd i nedanstående graf genom att markera de bågar som ingår i trädets totalkostnad.



## 2 Del B

### 2.1 Rekursion och induktion

Tornen i Hanoi är ett matematiskt problem som består av tre vertikala pinnar. På den vänstra pinnen sitter  $n$  stycken skivor med hål i. Dessa skivor är olika stora och sorterade i storleksordning med den största underst. Spelet går ut på att flytta över hela stapeln till högra pinnen likadant sorterad. Man får flytta bara en skiva i taget. Man får inte lägga en större skiva på en mindre. Man får använda mellanpinne som hjälp.

Använd induktion för att visa att problemet är lösbart för alla naturliga tal  $n \geq 1$ . Ditt bevis ska ha med alla tre ”rubriker”. Visa tydligt var du använder induktionsantagandet.

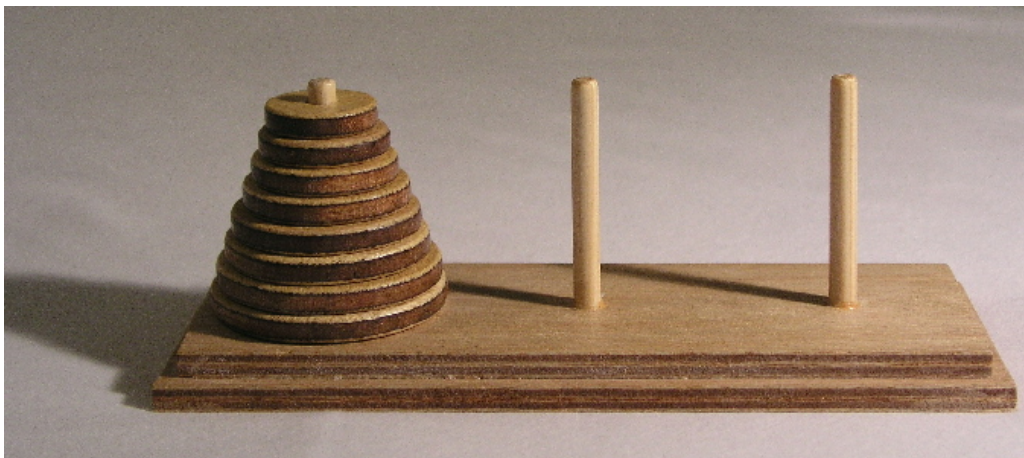


Figure 1: CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=228623>

## 2.2 Grafteori

Låt  $G = (V, E)$  och  $H = (V', E')$  vara två oriktade grafer. Säg att  $G$  och  $H$  är *isomorfa* om det existerar en funktion  $f : V \rightarrow V'$  så att

- $f$  är en *bijektion*, det vill säga:
  - för varje  $x' \in V'$  så existerar det ett  $x \in V$  så att  $f(x) = x'$ , och
  - för varje  $x' \in V'$  och  $x, y \in V$  så att  $f(x) = f(y) = x'$  så är  $x = y$ .
- $\{x, y\} \in E$  om och endast om  $\{f(x), f(y)\} \in E'$ .

Svara på följande frågor:

- a) Ge exempel på två (olika) grafer som är isomorfa.
- b) Ge exempel på två grafer inte är isomorfa.
- c) Stämmer det alltid att om  $G$  har en Eulercykel, och om  $G$  är isomorf med grafen  $H$ , så har  $H$  också en Eulercykel?

Tydliga motiveringar krävs för att ge poäng. Om du exempelvis tror att ett påstående är falskt behöver du styrka det genom ett konkret motexempel, och om du tror att det är sant behöver du bevisa det.

## 2.3 Numeriska metoder

Använd Newton-metoden för att numeriskt approximera  $\sqrt{3}$ .

## Bilaga: Formelsamling

### Aritmetiska och geometriska talföljder

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 k^{n-1}$$

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

### Talteori

**Lemma 1** För alla  $a, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$  gäller: Om  $a \mid b_1$  och  $a \mid b_2$  så gäller även att  $a \mid n_1 b_1 + n_2 b_2$ , för godtyckliga  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ .

**Lemma 2** För alla  $a, b \in \mathbb{N}$  gäller  $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(b, a \bmod b)$ .

### Sannolikhetslära och kombinatorik

Bayes regel:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

	utan återläggning (upprepning)	med återläggning (upprepning)
utan hänsyn taget till ordning	mängd $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	multimängd $\binom{n+k-1}{n-1}$
med hänsyn taget till ordning	enkel lista $\frac{n!}{(n-k)!}$	lista $n^k$

Figure 2: Urnmodellen.

## Numeriska metoder

Newtons metod:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$