

TDP015 Grunder i matematik och logik

Tentamen 2024-05-28 kl 14.00-18.00

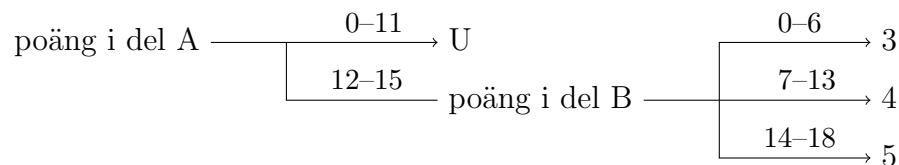
Examinator: Jose M. Peña

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram. Helt okommenterade svar ger dock i regel 0 poäng.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.**

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare med tomt minne.

Lycka till!

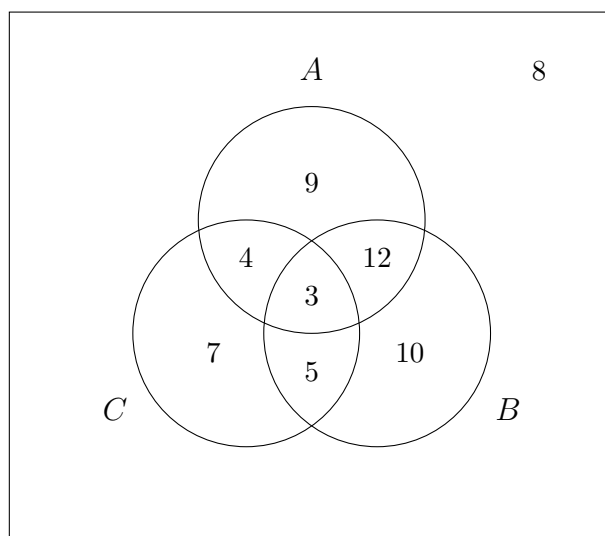
1 Del A

1.1 Logik och mängdlära

1. Ställ upp sanningsvärdestabeller för följande satser och avgör därigenom om satserna är logiskt ekvivalenta. Skriv en kolumn för varje delsats.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \quad p \leftrightarrow q \quad (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

2. Betrakta mängden $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 5\}$. Ställ upp en tabell som anger antalet delmängder till A med kardinalitet k , för alla $k \leq |A|$.
3. Figuren nedan är ett venndiagram för tre mängder A , B och C . Talen i figuren anger antalet element i vardera sektor av diagrammet. Bestäm antalet element i $A \cap B$ och i $B \setminus (A \cup C)$.



1.2 Rekursion och induktion

1. Beräkna den aritmetiska summan $99+105+\dots+195$. Använd formlerna för aritmetiska summor och aritmetiska talföljder.
2. Uttrycket $7 + 14 + \dots + 1792$ är en geometrisk summa.
 - (a) Vad är den näst sista termen i summan?
 - (b) Hur många termer finns i summan?
 - (c) Beräkna summans värde.
3. Använd induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Ditt bevis ska ha med alla tre ”rubriker”. Visa tydligt var du använder induktionsantagandet och redovisa samtliga uträkningar.

$$\sum_{i=0}^n (2i) = n(n+1)$$

1.3 Talteori

1. Ange alla (positiva) delare till talet 42. Ringa in de delare som är primtal.
2. En analog klocka visar femton minuter över åtta. Vad visar samma klocka om 123 timmar? och om 735 minuter?
3. Beräkna den största gemensamma delaren till $a = 588$ och $b = 438$ med hjälp av Euklides algoritm. Redovisa utförligt.

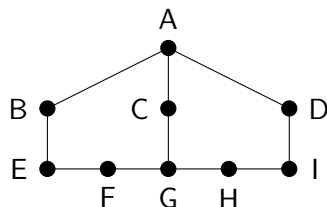
1.4 Kombinatorik och sannolikhetslära

1. Ett visst användarnamn ska bestå av fyra tecken. De tillåtna tecknen är de tio siffrorna 0 till och med 9 samt 20 bokstäver ur det engelska alfabetet (endast små bokstäver).
 - (a) Hur många olika användarnamn kan man skapa med dessa tecken?
 - (b) Hur många kan man skapa om första tecknet ska vara en bokstav?
2. Från en grupp på åtta personer ska tre olika personer väljas. På hur många sätt kan detta göras
 - (a) om ordningsföljden är väsentlig?
 - (b) om ordningsföljden är oväsentlig?
3. En påse innehåller två mynt: ett vanligt mynt och ett som hamnar på krona 80% av fallen. Du drar slumpmässigt ett mynt ur påsen och kastar det i luften.
 - (a) Hur stor är sannolikheten att myntet visar krona när det landar?
 - (b) När myntet landar visar det krona. Hur stor är sannolikheten att du kastade det manipulerade myntet?

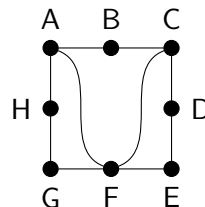
1.5 Grafteori

1. Ange en Eulerväg genom grafen eller skriv "finns ej".

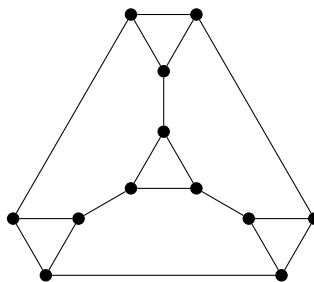
(a)



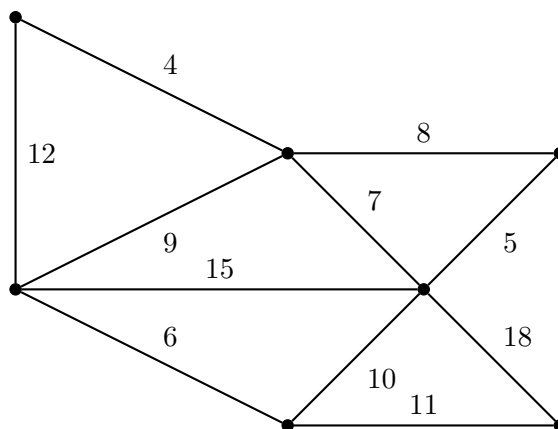
(b)



2. Rita in en Hamiltoncykel i grafen.



3. Ange ett minimalt uppspannande träd i nedanstående graf genom att markera de bågar som ingår i trädet. Ange även trädets totalkostnad.



2 Del B

2.1 Rekursion och induktion

Tornen i Hanoi är ett matematiskt problem som består av tre vertikala pinnar. På den vänstra pinnen sitter n stycken skivor med hål i. Dessa skivor är olika stora och sorterade i storleksordning med den största underst. Spelet går ut på att flytta över hela stapeln till högra pinnen likadant sorterad. Man får flytta bara en skiva i taget. Man får inte lägga en större skiva på en mindre. Man får använda mellanpinne som hjälp.

Använd induktion för att visa att problemet är lösbart för alla naturliga tal $n \geq 1$. Ditt bevis ska ha med alla tre ”rubriker”. Visa tydligt var du använder induktionsantagandet.

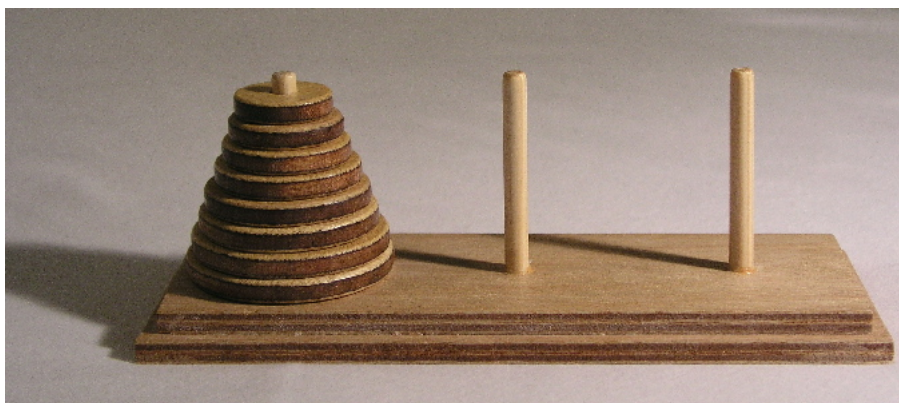


Figure 1: CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=228623>

2.2 Lösning

Bevis: Induktion över n .

Basfall: För $n = 1$, flytta skivan från vänstra pinnen till högra pinnen.

Induktionsantagande: Problemet är lösbart för $n = k \geq 1$.

Induktionssteg: För $n = k + 1$, använd induktionsantagandet för att flytta alla skivorna förutom den största från vänstra pinnen till mellanpinnen med hjälp av den högra pinnen. Flytta den största skivan från den vänstra pinnen till högra pinnen. Använd ingen induktionsantagandet för att flytta alla skivorna från mellanpinnen till högra pinnen med hjälp av den vänstra pinnen.

2.3 Kombinatorik och sannolikhetslära

En sökmotor på internet letar efter ett nyckelord i 9 databaser i slumpmässig ordning. Endast 5 av dessa databaser innehåller det givna nyckelordet. Beräkna sannolikheten att nyckelordet finns i minst 2 av de första 4 sökta databaserna.

Hjälp: Problemet kan modelleras som en urnmodell med vita och svarta kulor. En kula representerar en delmängd av 4 databaser. En vit kula representerar en delmängd av 4 databaser där minst 2 databaser innehåller nyckelordet. Det skulle hjälpa att veta hur många kulor det finns totalt och hur många av dem som är vita.

2.4 Lösning

Den sökta sannolikheten är antal vita kulor delad med antal kulor.
Antal kulor = $C(9, 4)$, dvs antal kombinationer av 4 databaser ur 9 databaser.
Antal vita kulor = $C(5, 2)C(4, 2) + C(5, 3)C(4, 1) + C(5, 4)C(4, 0)$, dvs antal kombinationer med exakt två databaser med nyckelordet plus antal kombinationer med exakt tre databaser med nyckelordet plus antal kombinationer med exakt fyra databaser med nyckelordet. Den första termen i summan är antal kombinationer av 2 databaser med nyckelordet ur 5 databaser med nyckelordet gånger antal kombinationer av 2 databaser utan nyckelordet ur 4 databaser utan nyckelordet. Likadan för den andra och tredje termerna i summan.
Problemet kan också lösas med ett träd diagram.

2.5 Numeriska metoder

Använd Newton-metoden för att numeriskt approximera $\sqrt{2}$.

2.6 Lösning

Se föreläsningen om numeriska metoder.

Bilaga: Formelsamling

Aritmetiska och geometriska talföljder

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_n = a_1 k^{n-1}$$

$$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1} \quad \text{där } k \neq 1$$

Talteori

Lemma 1 För alla $a, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ gäller: Om $a \mid b_1$ och $a \mid b_2$ så gäller även att $a \mid n_1 b_1 + n_2 b_2$, för godtyckliga $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2 För alla $a, b \in \mathbb{N}$ gäller $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(b, a \bmod b)$.

Sannolikhetslära och kombinatorik

Bayes regel:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

	utan återläggning (upprepning)	med återläggning (upprepning)
utan hänsyn taget till ordning	mängd $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	multimängd $\binom{n+k-1}{n-1}$
med hänsyn taget till ordning	enkel lista $\frac{n!}{(n-k)!}$	lista n^k

Figure 2: Urnmodellen.

Numeriska metoder

Newtons metod:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$