Tentamen 2023-05-30

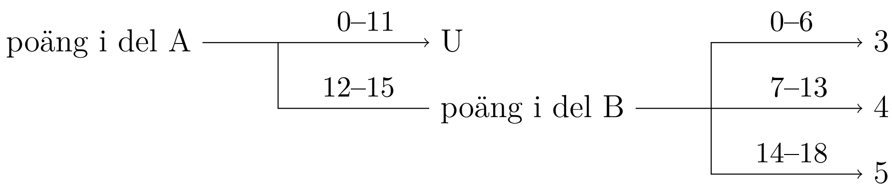
Examinator: Victor Lagerkvist

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram. Helt okommenterade svar ger dock i regel 0 poäng.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.**

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 **Logik och mängdlära**

a) Säg att två satser A och B är *logiskt ekvivalenta* om $A \leftrightarrow B$ är en tautologi. Avgör om

$$x \to y \tag{A}$$

är logiskt ekvivalent med

$$(z \leftrightarrow \neg y) \land (z \to \neg x) \tag{B}$$

Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsatser som du tycker är triviala.

Facit: Nej, satserna är inte logiskt ekvivalenta.

b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera. Om en sats är en kontradiktion eller en tautologi måste du bevisa det med hjälp av en sanningstabell. Om en sats varken är en tautologi eller en kontradiktion räcker det med att producera två sanningstilldelningar som bevisar detta (det vill säga, en satisfierande tilldelning och en falsifierande).

i) $(p \lor q \lor r) \land (p \lor \neg q \lor \neg r)$.

ii) $(p \land q \land r) \lor (\neg p \land \neg q \land \neg r)$.

iii) $(p \lor q) \land (p \lor \neg q) \land (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$.

Facit:

i) Varken eller.

ii) Varken eller.

iii) Kontradiktion.

c) Låt $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ vara tre godtyckliga, men ändliga, mängder av naturliga tal. Vilka av följande påståenden är sanna, respektive falska?

i) Om $A \cap B = \emptyset$ och $A \cap C = \emptyset$ så stämmer det även att $B \cap C = \emptyset$.

ii) $|A| = |B| = |C|$ medför alltid att $A = B = C$.

Motivera dina svar: endast ja-/nejsvar ger i regel 0 poäng.

Facit:

i) Falskt.

ii) Falskt.

02 **Rekursion och induktion**

a) Här är en aritmetisk talföljd: $7, 10, 13, ...$

i) Definiera talföljden via en rekursiv funktion.

ii) Beräkna summan av de 50 första talen i sekvensen.

Facit:

i) $T(1) = 7$, $T(n) = T(n-1) + 3$ för $n > 1$.

ii) 4025.

b) Här är en geometrisk talföljd: $1, 3, 9, \dots$.

i) Bestäm a_7.

ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{7} a_k$.

Facit:

i) 729.

ii) 1093.

c) Definiera en funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ med följande egenskaper: $f(0) = 1$ och $f(n) = 2f(n-1)$ för alla $n > 0$. Bevisa att $f(n) = 2^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ genom att använda induktion.

Facit:

- Basfall: $f(0) = 1 = 2^0 = 1$.
- Induktionssteget: anta att påståendet stämmer för $k \geq 0$. Vi visar att det även stämmer för $k+1$. VL: $f(k+1) = 2f(k+1-1) = 2f(k) = 22^k = 2^{k+1}$. HL: 2^{k+1} (trivial).

03 **Talteori**

a) Ange alla (positiva) delare till talet 99. Ange vilka delare som är primtal.

Facit: 1, 3, 9, 11, 33, 99, varav 3 och 11 är primtal.

b) Låt $k > 0$ vara ett naturligt tal. För två tal $n, m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, säg att m är en *additiv invers* till n $(\mathrm{mod}\, k)$ om $n + m \equiv 0 \pmod{k}$. För $k = 4$, vilka tal $0 \leq n \leq 3$ har en additiv invers $(\mathrm{mod}\, 4)$? Motivera ditt svar.

Facit: Alla tal.

c) Är 88 och 25 relativt prima? Använd Euklides algoritm för att motivera ditt svar och redovisa utförligt alla beräkningar.

Facit: Ja, talen är relativt prima.

04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

a) En byte är en sekvens av 8 bitar (där varje bit kan vara 0 eller 1). Hur många bytes finns det som börjar och slutar med en nolla?

Facit:

$2^6 = 64$.

b) I en e-butik kan man välja mellan 10 olika tillbehör när man konfigurerar sin dator. Hur många konfigurationer kan man skapa med 5 olika tillbehör?

Facit:

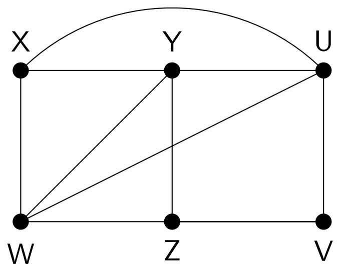
$$\binom{10}{5} = 252$$

c) Anta att man i en mordutredning har en misstänkt person där man initialt bedömer sannolikheten för att den misstänkte ska vara skyldig till mordet till 80%. Men ett nytt bevis i utredningen uppdagas: den skyldige har bevisats vara vänsterhänt. Anta att 10% av befolkningen är vänsterhänta. Vad är då sannolikheten att den misstänkte är mördaren om denne är vänsterhänt?

Facit: $\approx 0,976$. Se exempelvis `https://www.ida.liu.se/~TDP015/extra4.pdf` för en liknande uppgift. Ett vanligt fel är att man introducerar en händelse V med meningen *en person är vänsterhänt* men för att kunna svara på frågan behöver man introducera en händelse som beskriver *den misstänkte är vänsterhänt*. Denna sannolikhet kan sen beräknas via ett träddiagram.

05 **Grafteori**

a) Här är en graf:



i) Ange en Eulerväg genom grafen, eller svara ”finns ej”.

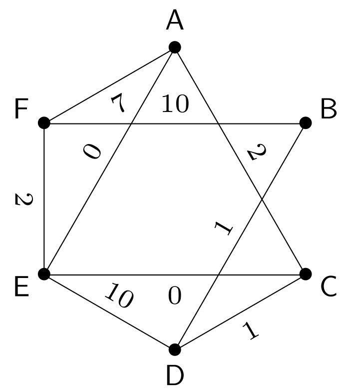
ii) Har grafen en Eulercykel? Om inte, vad är det minsta antalet bågar som du behöver lägga till i grafen för att skapa en Eulercykel? Mellan vilka noder måste dessa bågar i så fall gå?

Facit:

i) Ja, mellan X och Z.

ii) en båge, mellan X och Z.

b) Här är en viktad graf:



i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod E. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals eller Prims algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

Facit:

i) Hamiltoncykel: E–A–C–D–B–F–E. Totalkostnad: 17.

ii) Ett minimalt uppspännande träd kan konstrueras med totalkostnad 4.

c) Ett träd är som bekant en sammanhängande graf utan cykler. Svara på följande frågor.

i) Har varje träd en Eulerväg?

ii) Har varje träd en Hamiltonväg?

iii) Kan antalet bågar i ett träd vara strikt större än antalet noder? Här antar vi att trädet har oriktade bågar.

Motivera dina svar: endast ja-/nejsvar ger i regel 0 poäng.

Facit:

i) Nej.

ii) Nej.

iii) Nej.

Del B

06 **Avancerad talteori**

För ett naturligt tal $n \geq 1$ definierar vi Eulers ϕ-funktion som

$$\phi(n) = |\{m \mid \operatorname{sgd}(n, m) = 1, 1 \leq m \leq n\}|,$$

det vill säga, antalet tal i intervallet $1, \dots, n$ som är relativt prima med n. Visa följande:

a) $\phi(p) = p - 1$ om $p \geq 2$ är ett primtal.

b) $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ om $p \geq 2$ är ett primtal och $k \geq 1$ ett naturligt tal.

Tydliga motiveringar/bevis krävs för att ge poäng.

07 **Avancerad logik**

Vi börjar med att definiera följande koncept.

- En n-ställig *Boolesk funktion* är en funktion $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, det vill säga, en funktion som tar n Booleska argument och returnerar ett Booleskt argument.
- Om $s = (x_1, \dots, x_n)$ och $t = (y_1, \dots, y_n)$ är två Booleska tupler av längd n så skriver vi $s \leq t$ om $x_i \leq y_i$ för varje $1 \leq i \leq n$.
- En n-ställig Boolesk funktion f sägs vara *monoton* om $f(x_1, \dots, x_n) \leq f(y_1, \dots, y_n)$ närhelst $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$.

Svara på följande frågor.

a) Ge ett exempel på en Boolesk, 2-ställig funktion som är monoton.

b) Ge ett exempel på en Boolesk, 2-ställig funktion som inte är monoton.

c) Anta att f är en m-ställig, monoton Boolesk funktion, och $g_1, \dots, g_m$ är n-ställiga, monotona, Booleska funktioner. Definiera funktionen $h\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ som $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$ (för alla argument $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$). Visa att h är monoton.

Tydliga motiveringar/bevis krävs för att ge poäng.

08 **Avancerad grafteori**

Låt $G = (V, E)$ och $H = (V', E')$ vara två oriktade grafer. Säg att G och H är *isomorfa* om det existerar en funktion $f\colon V \to V'$ så att

- f är en *bijektion*, det vill säga:
  - för varje $x' \in V'$ så existerar det ett $x \in V$ så att $f(x) = x'$, och
  - för varje $x' \in V'$ och $x, y \in V$ så att $f(x) = f(y) = x'$ så är $x = y$.
- $\{x, y\} \in E$ om och endast om $\{f(x), f(y)\} \in E'$.

Svara på följande frågor.

a) Ge exempel på två (olika) grafer som är isomorfa.

b) Ge exempel på två grafer inte är isomorfa.

c) Stämmer det alltid att om G har en Eulercykel, och om G är isomorf med grafen H, så har H också en Eulercykel?

Tydliga motiveringar krävs för att ge poäng. Om du exempelvis tror att ett påstående är falskt behöver du styrka det genom ett konkret motexempel, och om du tror att det är sant behöver du bevisa det.