Tentamen 2021-05-31

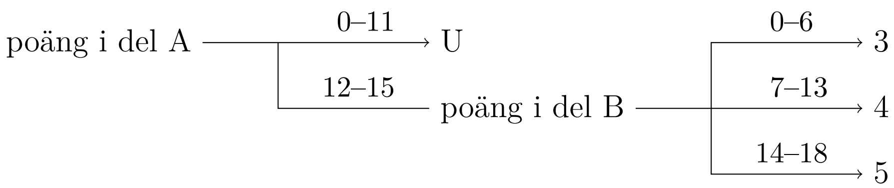
Examinator: Victor Lagerkvist

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram. Helt okommenterade svar ger dock i regel 0 poäng.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.**

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 **Logik och mängdlära**

a) Säg att en sats B är en *logisk konsekvens* av en sats A om $A \to B$ är en tautologi. Avgör om

$$\neg q \to \neg p \tag{B}$$

är en logisk konsekvens av

$$(p \to q) \tag{A}$$

Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsatser som du tycker är triviala.

b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera. Om en sats är en kontradiktion eller en tautologi måste du bevisa det med hjälp av en sanningstabell. Om en sats varken är en tautologi eller en kontradiktion räcker det med att producera två sanningstilldelningar som bevisar detta (det vill säga, en satisfierande tilldelning och en falsifierande).

i) $p \wedge q \wedge (p \wedge q \to r)$

ii) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

c) Låt $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ vara tre godtyckliga mängder av naturliga tal. Vilka av följande påståenden är sanna, respektive falska?

i) Om $A \subseteq B$ eller $A \subseteq C$ så stämmer det även att $A \subseteq B \cup C$.

ii) Om $A \subseteq B$ och $A \subseteq C$ så stämmer det även att $A \subseteq B \cap C$.

iii) $A \subseteq B$ eller $A \subseteq B^c$.

Motivera dina svar: endast ja-/nejsvar ger i regel 0 poäng.

02 Rekursion och induktion

a) Här är en aritmetisk talföljd: $1, 3, 5, \ldots$.

   i) Hur många element i talföljden är (strikt) mindre än 100?

   ii) Beräkna summan av dessa tal (det vill säga, summan av alla tal i sekvensen som är strikt mindre än 100).

b) Här är en geometrisk talföljd: $2, 6, 18, \ldots$.

   i) Bestäm a_8.

   ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{8} a_k$.

   iii) Hur många element i talföljden är (strikt) mindre än 10000?

c) Använd induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

03 Talteori

a) För ett positivt heltal a betecknar $s(a)$ summan av alla dess positiva delare, med undantag av talet själv. Exempel: $s(12) = 1+2+3+4+6 = 16$. Talet a kallas

fattigt om $s(a) < a$, *rikt* om $s(a) > a$, *perfekt* om $s(a) = a$.

   i) Vilka tal i intervallet 1 till 10 är fattiga, rika, respektive perfekta?

   ii) Låt $p \geq 2$ vara ett primtal. Är p fattigt, rikt, eller perfekt?

b) Låt $k > 0$ vara ett naturligt tal. För två tal $n, m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, säg att m är en *additiv invers* till n $(\mathrm{mod}\, k)$ om $n + m \equiv 0 \pmod{k}$. För $k = 3$, vilka tal $0 \leq n \leq 2$ har en additiv invers $(\mathrm{mod}\, 3)$? Motivera ditt svar.

c) För alla $a, b \in \mathbb{N}$ låt $\mathrm{sgd}(a, b)$ beteckna den största gemensamma delaren till a och b. Då gäller:

i) $\mathrm{sgd}(a, 0) = a$

ii) $\mathrm{sgd}(a, b) = \mathrm{sgd}(b, a)$

iii) $\mathrm{sgd}(a, b) = \mathrm{sgd}(a - b, b)$

Med hjälp av dessa regler (och ingenting annat), visa att 11 och 29 är relativt prima.

04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

a) Betrakta lösenord där tillåtna tecken är (1) en stor eller liten bokstav ur det engelska alfabetet 26 tecken, och (2) siffror mellan 0 och 9. Vi betraktar alltså “Hej123” och “hej123” som två olika lösenord.

   i) Hur många olika lösenord av längd 6 finns det?

   ii) Hur många lösenord av längd 6 finns det om vi kräver att varje lösenord har minst (1) en liten bokstav, (2) en stor bokstav, och (3) en siffra?

   iii) Finns det *fler* eller *färre* lösenord av den senare typen?

b) Anta att vi vill sätta ihop ett lag bestående av 4 personer och har 10 idrottare att utgå ifrån. Anta att det bland dessa idrottare finns 1 idrottare som är sämre än alla andra.

   i) På hur många sätt kan vi välja lag bestående av 4 personer?

   ii) Hur många lag (bestående av 4 personer) innehåller inte den sämsta idrottaren?

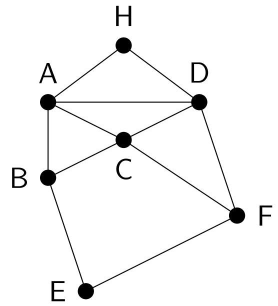
c) 51% av alla vuxna invånare i Rökköping är män; resten är kvinnor. En vuxen invånare blir slumpmässigt utvald för att delta i en enkät.

   i) Utan någon vidare information, hur stor är sannolikheten för att den utvalda personen är en kvinna?

   ii) Du får veta att den utvalda personen röker. Du vet att andelen rökare bland de vuxna männen i Rökköping är 9,5% och att andelen rökare bland de vuxna kvinnorna är 1,7%. Hur stor är då sannolikheten för att den utvalda personen är en kvinna?

05 **Grafteori**

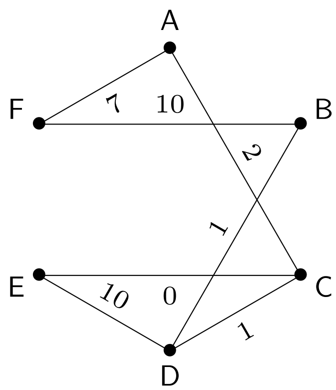
a) Här är en graf:



i) Ange en Eulerväg genom grafen, eller svara ”finns ej”.

ii) Har grafen en Eulercykel? Om inte, vad är det minsta antalet bågar som du behöver lägga till i grafen för att skapa en Eulercykel? Mellan vilka noder måste dessa bågar i så fall gå?

b) Här är en viktad graf:



i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

c) En *fullständig graf* är en oriktad graf där samtliga par av noder har en båge mellan sig.

i) Har varje fullständig graf en Eulerväg?

ii) Har varje fullständig graf en Eulercykel?

iii) Har varje fullständig graf en Hamiltoncykel? Tips: konstruera en fullständig graf med ett litet antal noder och försök att konstruera en Hamiltoncykel. Kan du med detta exempel säga något om det generella fallet?

Motivera dina svar: endast ja-/nejsvar ger i regel 0 poäng.

Del B

06 **Avancerad sannolikhetslära och induktion**

a) Anta att vi gör n experiment med återläggning där sannolikheten för ett positivt utfall är $0 < p < 1$, och sannolikheten för ett negativt utfall är $1 - p$. Låt P_n beteckna sannolikheten att ett *jämnt* antal experiment lyckas bland de n experimenten. Visa att

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1 - p)P_{n-1}$$

för alla $n \geq 1$.

b) Visa (med induktion) att

$$P_n = \frac{1 + (1 - 2p)^n}{2}$$

för alla $n \geq 1$.

Tydliga motiveringar/bevis krävs för att ge poäng.

07 **Avancerad logik**

Vi börjar med att definiera följande koncept.

a) En *literal* är antingen en negerad atomär sats ($\neg p$) eller en atomär sats (p). Vi kallar de förstnämnda för *negativa* literaler och de sistnämnda för *positiva* literaler.

b) En *klausul* (efter engelskans *clause*) är en disjunktion av literaler.

c) En *Horn-klausul* är en klausul som innehåller *som mest* en positiv literal.

d) En *Horn-databas* är en konjunktion av Horn-klausuler.

Svara på följande frågor.

a) Ge ett exempel på en Horn-databas med minst två Horn-klausuler.

b) Låt P vara en Horn-databas över atomära satser $p_1, \dots, p_n$ och låt f och g vara två satisfierande tilldelningar. Stämmer det att funktionen definierad som

$$h(p_i) = f(p_i) \vee g(p_i)$$

för varje $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ också satisfierar P?

c) Låt P vara en Horn-databas över atomära satser $p_1, \dots, p_n$ och låt f och g vara två satisfierande tilldelningar. Stämmer det att funktionen definierad som

$$h(p_i) = f(p_i) \wedge g(p_i)$$

för varje $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ också satisfierar P?

Tydliga motiveringar krävs för att ge poäng. Om du exempelvis tror att ett påstående är falskt behöver du styrka det genom ett konkret motexempel, och om du tror att det är sant behöver du bevisa det.

08 **Avancerad grafteori**

Låt $G = (V, E)$ vara en oriktad graf över en nodmängd V och en bågmängd E, och låt $k > 0$ vara ett naturligt tal. Säg att G är *k-färgningsbar* om det existerar en funktion f från nodmängden till $\{1, \dots, k\}$ så att $\{v, v'\} \in E$ innebär att $f(v) \neq f(v')$[1]. Definiera nu *färgningstalet* till en graf G ($F(G)$) som det minsta $k > 0$ så att grafen är k-färgningsbar.

a) Visa att $1 \leq F(G) \leq |V|$ för varje oriktad graf $G = (V, E)$.

b) En *klick* i en graf $G = (V, E)$ är en delmängd av noder $V' \subseteq V$ så att varje par av noder i V' har en båge mellan sig. Visa att om G innehåller en klick med k noder så stämmer det att $F(G) \geq k$.

Tydliga motiveringar krävs för att ge poäng. Om du exempelvis tror att ett påstående är falskt behöver du styrka det genom ett konkret motexempel, och om du tror att det är sant behöver du bevisa det.

[1] Det vill säga, kan varje nod associeras med en färg (av k givna färger) så att två intilliggande noder alltid får olika färger?