Tentamen 2020-06-01

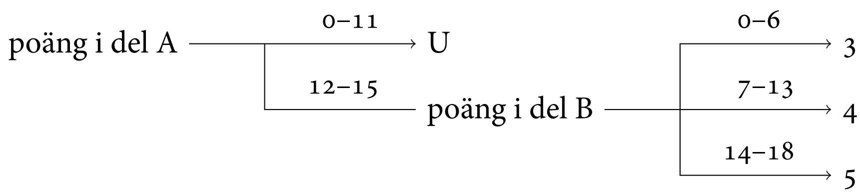
Examinator: Victor Lagerkvist

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.**

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 Logik och mängdlära

a) Säg att en sats B är en *logisk konsekvens* av en sats A om $A \to B$ är en tautologi. Avgör om

$$p \tag{B}$$

är en logisk konsekvens av

$$(q \to p) \land q \tag{A}$$

Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsatser som du tycker är triviala.

Facit: Ja, B är en logisk konsekvens av A, vilket kan bevisas genom att ställa upp en sanningstabell för $A \to B$ och se att det är en tautologi.

b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera. Om en sats är en kontradiktion eller en tautologi måste du bevisa det med hjälp av en sanningstabell. Om en sats varken är en tautologi eller en kontradiktion räcker det med att producera två sanningstilldelningar som bevisar detta (det vill säga, en satisfierande tilldelning och en falsifierande).

i) $p \to q \to p$

ii) $(p \lor q \lor r) \land (p \lor q \lor s) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg s)$

Facit:

i) Beror på om man läser implikationen från vänster till höger eller från höger till vänster. Bägge alternativen har gett poäng.

ii) Varken eller.

c) Låt $A, B \subseteq \mathbb{N}$ vara två godtyckliga mängder av naturliga tal. Stämmer det (alltid) att

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c?$$

Motivera ditt svar genom att rita upp två Venn-diagram, ett för $(A \cap B)^c$, och ett för och $A^c \cup B^c$, som styrker ditt påstående.

Facit: Ja, påståendet stämmer alltid, och kan visas med hjälp av Venn-diagram.

02 Rekursion och induktion

a) Uttrycket $11 + 20 + \cdots + 299$ är en aritmetisk summa.

i) Hur många termer finns i summan?

ii) Beräkna summans värde.

Facit:

i) 33 termer ($a_1 = 11, d = 9$).

ii) 5115.

b) Här är en geometrisk talföljd: $3, 6, 12, \dots$.

i) Bestäm a_{10}.

ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{10} a_k$.

iii) Hur många element i talföljden är (strikt) mindre än 5000?

Facit:

i) 1536.

ii) 3069.

iii) 11.

c) Använd induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=2}^{n+1} 3i = \frac{3n^2 + 9n}{2}$$

Facit:

- Basfall: VL = $\sum_{i=2}^{2} 3i = 6$, HL = $\frac{3+9}{2} = 6$.
- Induktionssteget: anta att påståendet stämmer för $k \geq 1$. Vi visar att det även stämmer för $k+1$. VL: $\sum_{i=2}^{k+2} 3i = \sum_{i=2}^{k+1} 3i + 3(k+2) = \frac{3k^2+9n}{2} + 3k + 6 = \frac{3k^2+9k}{2} + \frac{6k+12}{2} = \frac{3k^2+9k+6k+12}{2} = \frac{3k^2+15k+12}{2}$. HL: $\frac{3(k+1)^2+9(k+1)}{2} = \frac{3(k^2+2k+1)+9k+9}{2} = \frac{3k^2+6k+3+9k+9}{2} = \frac{3k^2+15k+12}{2}$.

03 **Talteori**

a) Vilka jämna heltal mellan 0 (inklusive 0) och 30 (inklusive 30) kan skrivas som en summa av två (inte nödvändigtvis olika) primtal?

Facit: Alla förutom 0 och 2. Den så kallade *Goldbach-hypotesen* postulerar att detta är möjligt för alla jämna heltal större än 2.

b) Vilken veckodag har vi om tusen dagar (under förutsättningen att det är måndag idag)?

Facit: Söndag ($1000 \mod 7 = 6$, så vi lägger till 6 dagar från måndag).

c) För alla $a, b \in \mathbb{N}$ låt $\text{sgd}(a, b)$ beteckna den största gemensamma delaren till a och b. Då gäller:

i) $\text{sgd}(a, 0) = a$

ii) $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(b, a)$

iii) $\text{sgd}(a, b) = \text{sgd}(a - b, b)$

Med hjälp av dessa regler (och ingenting annat), visa att 10 och 21 är relativt prima.

Facit: $\text{sgd}(10, 21) = \text{sgd}(21, 10) = \text{sgd}(21 - 10, 10) = \text{sgd}(11, 10) = \text{sgd}(1, 10) = \text{sgd}(10, 1) = \text{sgd}(9, 1) = \text{sgd}(8, 1) = ... = \text{sgd}(0, 1) = 1$.

04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

a) En byte är en sekvens av 8 bitar (där varje bit kan vara 0 eller 1).

   i) Hur många bytes innehåller exakt 2 ettor?

   ii) Hur många bytes innehåller åtminstone 6 ettor?

   Facit:

   i) 28. ii) 37.

b) Anta att vi vill sätta ihop ett lag bestående av 5 personer och har 12 idrottare att utgå ifrån. Anta att det bland dessa 12 idrottare finns 1 idrottare som är sämre än alla andra, och 1 idrottare som är bättre än alla andra.

   i) På hur många sätt kan vi välja lag bestående av 5 personer?

   ii) Hur många lag (bestående av 5 personer) innehåller både den bästa och den sämsta idrottaren?

   Facit:

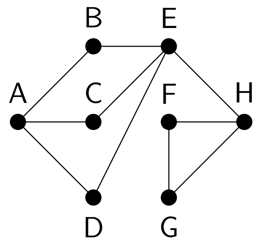
   i) 792. ii) 120.

c) Ett försäkringsbolag bestämmer sig för att dela upp sina kunder som "riskbenägna" eller "inte riskbenägna". Med hjälp av dessa två kategorier räknar de sedan ut att sannolikheten för att en riskbenägen person under ett år kommer att råka ut för en olycka är 0.4, men att denna sannolikhet sjunker till 0.2 för en person som inte är riskbenägen. De uppskattar att 30% av befolkningen som helhet är riskbenägna. Anta nu att en kund köper en försäkring och inom ett år råkar ut för en olycka. Vad är sannolikheten för att kunden är riskbenägen?

   Facit: ≈ 0.46.

05 **Grafteori**

a) Här är en graf:



i) Ange en Eulerväg genom grafen, eller svara ”finns ej”.

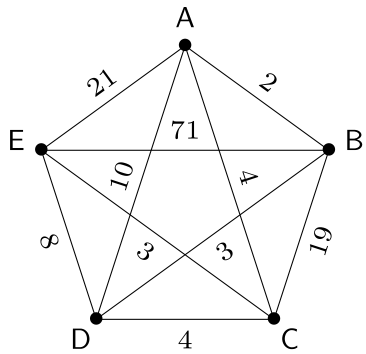
ii) Vad är det minsta antalet bågar som du behöver lägga till i grafen för att skapa en Eulercykel? Mellan vilka noder måste dessa bågar i så fall gå?

Facit:

i) H–G–F–H–E–D–A–C–C–E–A

ii) en båge, mellan A och H

b) Här är en viktad graf:



i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

Facit:

i) Hamiltoncykel: A–B–D–C–E–A. Totalkostnad: 33.

ii) Ett minimalt uppspännande träd kan konstrueras med totalkostnad 12.

c) En *skog* är som bekant en acyklisk graf.

i) Har varje skog ett minimalt uppspännande träd? (Om vi antar att varje båge får en lämplig vikt).

ii) Har varje skog en Eulerväg?

iii) Har varje skog en Hamiltoncykel?

Facit:

i) Nej (konceptet är inte ens relevant för en icke-sammanhängade graf).

ii) Nej.

iii) Nej.

Del B

06 Avancerad induktion

a) Existerar det ett $n_0 \geq 0$ så att

$$n^2 < 2^n$$

för alla $n \geq n_0$? Om ja, visa detta med hjälp av induktion över n.

b) Ett *treställigt träd* är ett träd där varje nod i trädet har som mest tre "barnnoder". En nod i trädet utan barn kallas för ett *löv*. Alla träd har en unik huvudnod som ofta kallas *rot*. En *gren* i trädet är en väg från roten av trädet till ett löv. *Djupet* hos ett träd är längden av den längsta grenen i trädet.

i) Ange en formel som beskriver det maximala antalet noder i ett treställigt träd av djup k.

ii) Visa att ditt påstående stämmer genom induktion över träddjupet k.

07 Avancerad logik

En sanningstilldelning till en logisk sats ϕ över satsvariabler $p_1, \dots, p_n$ kan associeras med en mängd $M \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}$ där p_i är sann om och endast om $p_i \in M$. Om M satisfierar ϕ säger vi att M är en *modell* till ϕ. Vilka av följande påståenden är sanna, och vilka är falska?

a) Om M är en modell till ϕ så är M^c en modell till ϕ.

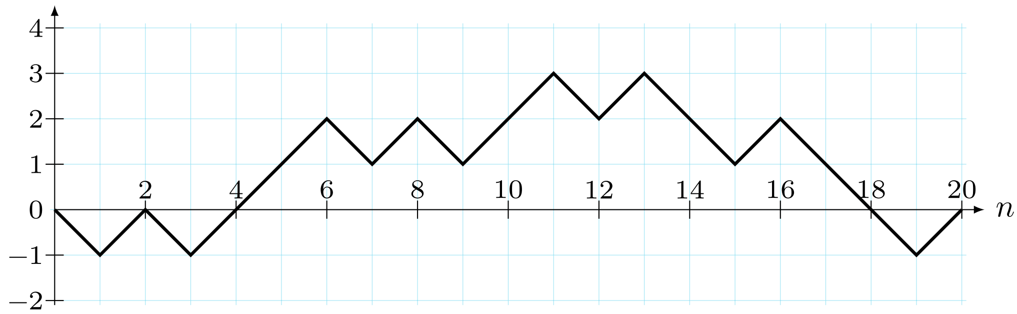
b) Om M och M' är modeller till ϕ så är $M \cup M'$ en modell till ϕ.

c) Om M är en modell till ϕ där ϕ endast består av implikation ($\rightarrow$) och konjunktion ($\wedge$), så är varje $M' \subseteq M$ en modell till ϕ.

Tydliga motiveringar krävs för att ge poäng. Om du exempelvis tror att ett påstående är falskt behöver du styrka det genom ett konkret motexempel, och om du tror att det är sant behöver du bevisa det.

08 **Vandringar i ett koordinatsystem**

Du ”vandrar omkring” i ett koordinatsystem genom att börja i origo och i varje steg antingen gå ”till höger och uppåt” eller ”till höger och neråt”. Så här t.ex. skulle en vandring med 20 steg kunna se ut:



En vandring som slutar på nollinjen kallas *balanserad*; vandringen i bilden är ett exempel på en balanserad vandring. Man inser att en vandring kan vara balanserad endast om antalet steg är ett jämnt tal, dvs. ett tal på formen $n = 2m$ där $m \geq 0$.

a) Hur många balanserade vandringar finns det med $2m$ steg? Härled en formel.

b) En vandrings *underskott* är antalet steg ”till höger och neråt” som den gör till en punkt under nollinjen. Underskottet för exempelvandringen är 3. Man kan visa att om man delar in alla balanserade vandringar efter vilket underskott de har, så finns det lika många vandringar i varje delmängd. Använd denna information för att härleda en formel för antalet balanserade vandringar som har $2m$ steg och underskott 0. Ledning: Vad är det minsta möjliga underskottet som en balanserad vandring med $2m$ steg kan ha? Vad är det största möjliga underskottet?

c) Antag att du i varje steg väljer hur du vill gå genom att singla slant. Härled formler för sannolikheten att gå en balanserad vandring och för att gå en balanserad vandring med underskott 0. (Din formel ska ta hänsyn till alla möjliga balanserade vandringar, inte avse sannolikheten för en specifik vandring.)