Tentamen 2019-05-28

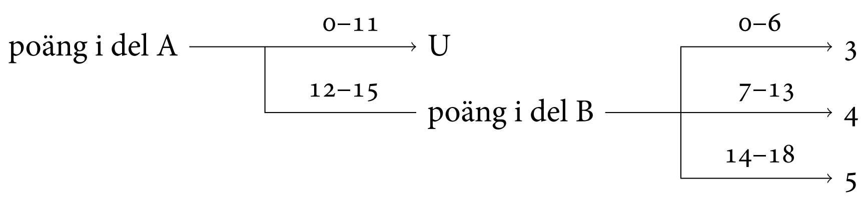
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. **De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text eller ett diagram.** Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. **De kräver utförliga redovisningar med korrekt notation och terminologi.** Frågorna i denna del är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Frikort. Eventuella frikort från duggorna gäller för respektive frågor i del A; ett frikort från duggan om grafteori (dugga 5) t.ex. gäller för frågan om grafteori (fråga 05). Du kan få högst 3 frikort tillgodoräknade. Du behöver inte ange hur du vill tillgodoräkna dig dina frikort; vi kommer att göra det på ett sätt som maximerar dina poäng.

Lycka till!

Del A

01 Logik och mängdlära

a) Avgör om följande satser är logiskt ekvivalenta. Använd sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje delsats, även för de delsatser som du tycker är triviala.

$$(p \to q) \to r \qquad\qquad (p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$$

Facit: Satserna är logiskt ekvivalenta. Under förutsättning att man listar tilldelningarna så som det gjorts på föreläsningarna får man följande värden för de sista kolumnerna i båda sanningsvärdestabellerna:

0 1 0 1 1 1 0 1

b) Avgör om följande satser är tautologier, kontradiktioner eller ingendera.

i) $(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$

ii) $((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$

Facit:

i) kontradiktion

ii) tautologi

c) För mängderna A, B och C gäller att

$$A = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 6 \} \qquad B = \{ n \in A \mid n \bmod 2 = 0 \} \qquad C = A \setminus B$$

Avgör om följande påståenden är sanna eller falska.

i) $B \subseteq A$

ii) $A = B \cup C$

iii) $B \cap C = \varnothing$

iv) $B \setminus A = C$

Facit:

i) sant

ii) sant

iii) sant

iv) falskt

a) Uttrycket $3 + 8 + \cdots + 123$ är en aritmetisk summa.

   i) Hur många termer finns i summan?

   ii) Beräkna summans värde.

Facit:

   i) 25 termer ($a_1 = 3, d = 5$)

   ii) 1575

b) Uttrycket $3 + 6 + \cdots + 1536$ är en geometrisk summa.

   i) Hur många termer finns i summan?

   ii) Beräkna summans värde.

Facit:

   i) 10 st ($a_1 = 3, k = 2$)

   ii) 3069

c) Använd induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n + n^2}{2}$$

Facit: Se föreläsningsmanuskriptet 2.20–2.22. Observera dock att basfallet här är $n = 0$ (som ger den tomma summan, vars värde är 0).

a) Ange alla (positiva) delare till talet 48. Ringa in de delare som är primtal.

Facit: 1 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 4 6 8 12 16 24 48

b) Vilken månad har vi om 333 månader?

Facit: februari (den månad som är om $333 \mod 12 = 9$ månader)

c) Två tal heter *relativt prima* om deras största gemensamma delare är 1. Avgör om följande talpar är relativt prima.

i) 12 och 35

ii) 438 och 588

Facit:

i) ja ($12 = 2^2 \cdot 3$, $35 = 5 \cdot 7$)

ii) nej (båda tal har 2 som delare)

Svara med ett konkret tal eller ett förenklat bråk, inte med en formel!

a) Fram till 2019 bestod ett svenskt registreringsskylt av tre bokstäver följt av tre siffror mellan 0 och 9. Från årsskiftet kan det sista tecknet även vara en bokstav. Med vilken faktor ökade antalet möjliga registreringsskyltar? Antag att det finns 30 bokstäver och att alla möjliga teckenkombinationer är tillåtna.

Facit: Faktor 4. Före ändringen fanns det $30^3 \cdot 10^3$ möjliga registreringsskyltar, efter ändringen finns det nu $30^3 \cdot 10^2 \cdot (10 + 30)$.

b) Från en grupp på 8 personer ska fyra väljas. På hur många sätt kan detta göras om ordningen

i) spelar roll

ii) inte spelar roll

Facit:

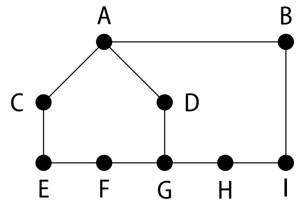
i) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

ii) $\binom{8}{4} = 1680/4! = 70$

c) I en mojängfabrik tillverkas 40% av mojängerna vid maskin A och de övriga vid maskin B. Maskinerna tillverkar en viss andel defekta mojänger; denna andel är 3% för maskin A och 6% för maskin B. En kund påträffar en defekt mojäng. Vad är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin A?

Facit: Svaret är 25% (eller 1/4). Uppgiften kan lösas enligt samma mönster som 4.28 i föreläsningsmanuskriptet.

a) Här är en graf:



i) Ange en Eulerväg genom grafen, eller svara ”finns ej”.

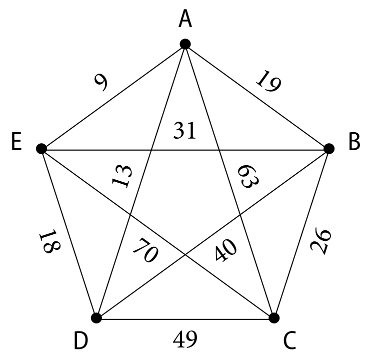
ii) Vad är det minsta antalet bågar som du behöver lägga till i grafen för att skapa en Eulercykel? Mellan vilka noder måste dessa bågar i så fall gå?

Facit:

i) A–B–I–H–G–D–A–C–E–F–G

ii) en båge, mellan A och G

b) Här är en viktad graf:



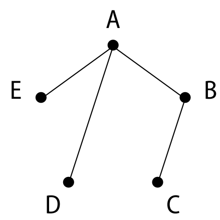
i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

Facit:

i) Hamiltoncykel: A–E–D–B–C–A. Totalkostnad: 156

ii) Minimalt uppspännande träd. Totalkostnad: 67



c) En graf som inte innehåller några cykler kallas *skog*. Avgör om följande påståenden stämmer. Om ditt svar är ”nej”, rita ett motexempel.

i) Varje träd är en skog.

ii) Varje skog är ett träd.

iii) Lägger man till en båge till en skog får man en cyklisk graf.

iv) Tar man bort en båge från en skog får man en osammanhängande graf.

Facit:

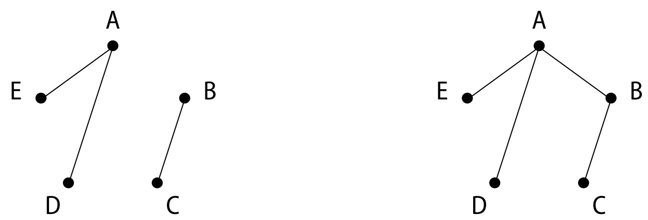
i) ja

ii) nej

iii) nej

iv) ja

Motexempel för ii) och iii): Den vänstra grafen här nedan är en skog men inget träd. Lägger man till en båge från A till B får man ett träd (för övrigt samma som i deluppgift b), alltså inte en cyklisk graf.



Del B

06 **Avancerad induktion**

a) Fibonaccis talföljd definieras genom formeln $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med startvärdena $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$. Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$$

b) Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 0$:

$$3^n \geq 2n + 1$$

07 **Magi med tal**

Välj ett godtyckligt tvåsiffrigt tal a. Talet ska vara större än noll.

a) Skriv ner talet a två gånger efter varandra, så att du får ett fyrsiffrigt tal. Jag ”gissar” att det nya talet är delbart med 101. Förklara varför jag har rätt.

Facit: Det fyrsiffriga talet kan skrivas på formen $100 \cdot a + a$, alternativt $101 \cdot a$. Detta visar att det kan delas med 101.

b) Skriv nu ner talet a tre gånger efter varandra, så att du får ett sexsiffrigt tal. Nu ”gissar” jag att det nya talet är delbart med 259. Förklara varför jag har rätt. Ange ett annat tresiffrigt tal som jag hade kunnat ”gissa”.

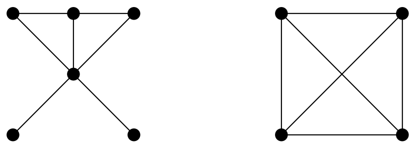
Facit: Det sexsiffriga talet kan skrivas på formen $10101 \cdot a$. Talet 10101 kan primtalsfaktoriseras som $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Talet $259 = 7 \cdot 37$ är därför en delare till det sexsiffriga talet. Ett annat tresiffrigt tal som hade fungerat är $3 \cdot 37 = 111$.

c) Antag att jag hade bett dig att skriva ner talet a fyra gånger efter varandra istället för tre, så att du hade fått ett åttasiffrigt tal. Förklara varför jag i detta fall inte borde ha ”gissat” 259. Ange även ett tal som hade fungerat.

Facit: Det nya talet kan skrivas på formen $1010101 \cdot a$. Talet 1010101 har inte 259 som delare (skriftlig division ger kvot 3900, rest 1). Ett tal som hade fungerat är 101.

08 Eulers polyederformel

Här nedanför har vi ritat två grafer.



I den högra grafen finns det ett ställe där två bågar korsar varandra, utan att det finns en nod där. Den vänstra grafen innehåller ingen sådan korsning. En sammanhängande graf som kan ritas utan korsningar kallas *plan sammanhängande graf*. Den vänstra grafen är alltså en sådan graf medan den högra grafen inte är det.

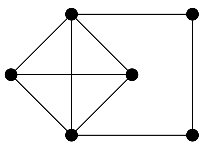
För plana sammanhängande grafer gäller *Eulers polyederformel*. Denna formel visar på ett samband mellan antalet noder, bågar och *ytor* i sådana grafer. Med en yta menar vi här ett område som helt omsluts av ett antal bågar. Även området utanför grafen räknas som en yta. Om vi kallar antalet noder för N, antalet bågar för B och antalet ytor för Y så säger Eulers polyederformel att

$$N - B + Y = 2\,.$$

a) Visa att du har förstått definitionerna:

i) Rita en plan sammanhängande graf med 5 noder och 4 ytor.

ii) Grafen här nedan har 6 noder, 9 bågar och 6 ytor, men $6 - 9 + 6 \neq 2$. Varför är detta inget motexempel för Eulers polyederformel?



b) Bevisa att Eulers polyederformel gäller för alla plana sammanhängande grafer genom induktion över det totala antalet noder och bågar. Vad händer när man lägger till antingen en ny nod eller en ny båge?

c) Ett annat sätt att bevisa Eulers polyederformel använder denna algoritm: Om grafen inte är ett träd, ta bort en båge som en avslutar en cykel i grafen. Förklara hur denna algoritm visar att formeln gäller. Ledning: Hur påverkas formeln när man tar bort bågar? Vad gäller när det inte längre går att ta bort bågar?