Tentamen 2018-05-29

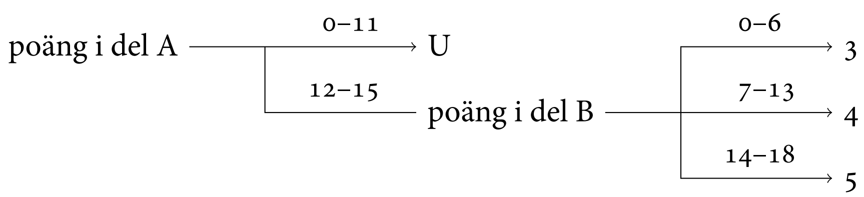
Examinator: Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar, del A och del B.

Del A består av 5 frågor à 3 poäng (totalt 15 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om de grundläggande begrepp och procedurer som behandlas på kursen. De kräver endast korta svar, såsom en uträkning, en kort text, eller ett diagram. Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

Del B består av 3 frågor à 6 poäng (totalt 18 poäng). Dessa frågor testar din kunskap om kursens mera avancerade begrepp och procedurer samt din problemlösningsförmåga. De kräver utförliga svar med korrekt notation och terminologi. Frågorna är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Observera att poäng från del A inte gäller i del B.

Frikort. Eventuella frikort från duggorna gäller för respektive frågor i del A; ett frikort från duggan om grafteori (tema 5) t.ex. gäller för frågan om grafteori (fråga 05). Du kan tillgodoräkna dig högst 3 frikort. Du behöver inte ange hur du vill tillgodoräkna dig dina frikort; detta kommer att göras på ett sätt som maximerar dina poäng.

Lycka till!

Del A

01 Logik och mängdlära

a) Bevisa följande logiska ekvation med hjälp av sanningsvärdestabeller. Skriv en kolumn för varje deluttryck, även för de deluttryck som du tycker är triviala.

$$p \leftrightarrow q \;=\; (p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)$$

Facit: Vi ställer upp en sanningsvärdestabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	1

För att se att ekvationen gäller kan vi konstatera att de markerade kolumnerna (som svarar mot ekvationens två led) är identiska.

b) Avgör om följande uttryck är tautologier, kontradiktioner eller ingendera. Beakta prioriteringsreglerna för de logiska konnektiven!

i) $(p \to q) \wedge p \to q$ ii) $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$

Facit:

i) tautologi   ii) kontradiktion

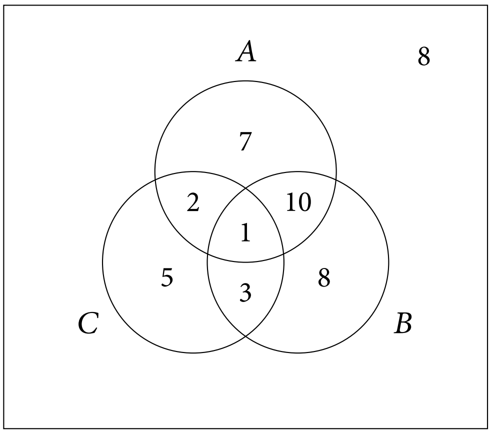
c) Tre mängder A, B, C är givna sådana att

- $|A \setminus (B \cup C)| = 7$
- $|B \setminus (A \cup C)| = 8$
- $|C \setminus (A \cup B)| = 5$
- $|A \cap B \cap C| = 1$
- $|(B \cap C) \setminus A| = 3$
- $|(A \cap C) \setminus B| = 2$
- $|(A \cap B) \setminus C| = 10$
- $|(A \cup B \cup C)^c| = 6$

Rita ett venndiagram för de tre mängderna. Skriv in rätt antal element i vardera sektor av venndiagrammet. Bestäm sedan antalet element i

i) $B \cup C$ ii) $B \cap C$

Facit: Vi ritar ett venndiagram:



Antalet element:

i) $2 + 1 + 10 + 5 + 3 + 8 = 29$ ii) $1 + 3 = 4$

a) En aritmetisk talföljd beskrivs genom $a_1 = 3$ och $d = 6$.

i) Bestäm a_{42}. ii) Bestäm $\sum_{k=1}^{42} a_k$.

Facit:

i) $a_{42} = a_1 + (42 - 1)d = 3 + 41 \cdot 6 = 249$

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{42} a_k = \frac{n(a_1 + a_{42})}{2} = \frac{42 \cdot (3 + 249)}{2} = 5292$

b) Talen $x - 5$, x och $x + 15$ är tre på varandra följande element i en viss geometrisk talföljd. Bestäm vilka tal det är.

Facit: I en geometrisk talföljd är kvoten mellan två på varandra följande element konstant. Vi måste alltså ha $x/(x-5) = (x+15)/x$. Genom att lösa för x får vi $x = 7{,}5$, så talen är 2,5, 7,5 och 22,5.

c) Visa med hjälp av induktion att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg)!

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = n^2 + 2n$$

Facit: Induktion på n.

Induktionsbas: $n = 1$. Vi bekräftar att VL = HL:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \sum_{i=1}^{n}(2i+1) = \sum_{i=1}^{1}(2i+1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ \text{HL} &= n^2 + 2n = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Induktionsantagande: Vi antar att påståendet är bevisat för något naturligt tal $p \geq 1$, dvs. att $\sum_{i=1}^{p}(2i+1) = p^2 + 2p$.

Induktionssteg: Vi visar med hjälp av induktionsantagandet att påståendet gäller för $p+1$, dvs. att $\sum_{i=1}^{p+1}(2i+1) = (p+1)^2 + 2\cdot(p+1)$. Vi räknar:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL} &= \sum_{i=1}^{p+1}(2i+1) = \left(\sum_{i=1}^{p}(2i+1)\right) + \big(2(p+1)+1\big) \\
&\overset{\mathrm{IA}}{=} (p^2+2p) + (2p+2+1) = p^2+4p+3 \\
\mathrm{HL} &= (p+1)^2 + 2(p+1) = p^2+2p+1+2p+2 = p^2+4p+3
\end{aligned}$$

Vilket skulle visas.

a) Ange alla (positiva) delare till talet 42. Ringa in de delare som är primtal.

Facit: $1 \; \boxed{2} \; \boxed{3} \; 6 \; \boxed{7} \; 14 \;\; 21 \;\; 42$

b) Lista alla primtal upp till och med 50.

Facit: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$

c) Använd Euklides' algoritm för att finna största gemensamma delaren till talen 936 och 248. Visa att du kan utföra Euklides' algoritm.

Facit: Vi simulerar Euklides' algoritm:

$$\begin{aligned} \gcd(936, 248) &= \gcd(248, 192) \\ &= \gcd(192, 56) \\ &= \gcd(56, 24) \\ &= \gcd(24, 8) \\ &= \gcd(8, 0) \\ &= 8 \end{aligned}$$

Den största gemensamma delaren till 936 och 248 är alltså 8.

04 Kombinatorik och sannolikhetslära

Svara med ett konkret tal, inte med en formel!

a) En burk innehåller en stor mängd svarta och vita kulor. Du tar kulor ur burken utan att titta. Hur många kulor behöver du ta för att vara säker på att du har tagit minst två kulor av samma färg?

Facit: Tre kulor. Om vi placerar tre föremål (kulor) i två lådor (färger) kommer minst en låda (färga) innehålla mer än ett föremål (kula).

b) Från en grupp på 10 personer ska tre väljas. På hur många sätt kan detta göras om ordningsföljden är

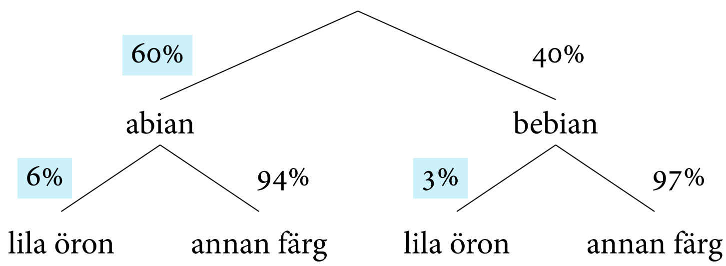
i) väsentlig   ii) oväsentlig

Facit:

i) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ii) $\binom{10}{3} = 120$

c) Planeten Zebulon befolkas av abianer och bebianer. 60% av befolkningen är abianer, och 6% av dessa har lila öron. Andelen bebianer med lila öron är endast 3%. Du träffar på en zebulonier med lila öron. Hur stor är sannolikheten att den är bebianer?

Facit: Svaret är 25%. Vi kan börja med att rita ett träddiagram för frågan. De markerade sannolikheterna är direkt angivna i lydelsen.

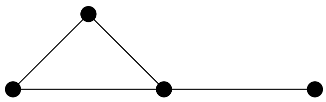


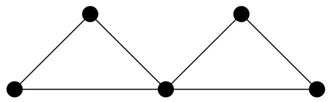
Den efterfrågade sannolikheten kan räknas ut med hjälp av Bayes' regel. Vi skriver B för "bebian" och L för "lila öron".

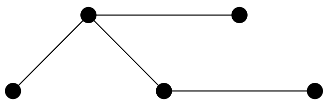
$$P(B \mid L) = \frac{P(B) \cdot P(L \mid B)}{P(L)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}03}{0{,}60 \cdot 0{,}06 + 0{,}40 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}012}{0{,}048} = 0{,}25$$

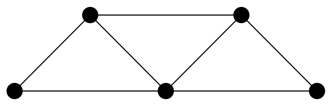
05 **Grafteori**

a) Avgör om grafen innehåller en Eulerväg.

i) 

iii) 

ii) 

iv) 

Facit:

i) ja (2 noder med udda gradtal)

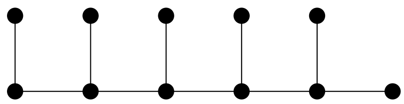
ii) nej (4 noder med udda gradtal)

iii) ja (0 noder med udda gradtal)

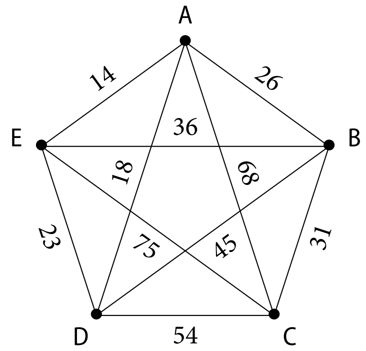
iv) ja (2 noder med udda gradtal)

b) Rita ett träd med 11 noder där en av noderna har grad 2 och alla andra noder har antingen grad 3 eller grad 1.

Facit:



c) Här är en viktad graf:



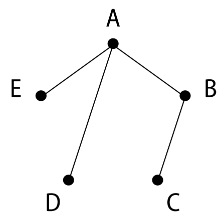
i) Använd närmaste granne-metoden för att finna en Hamiltoncykel i grafen som börjar i nod A. Ange även cykelns totalkostnad.

ii) Använd Kruskals algoritm för att finna ett minimalt uppspännande träd i grafen. Ange även trädets totalkostnad.

Facit:

i) Hamiltoncykel: A–E–D–B–C–A. Totalkostnad: 181

ii) Minimalt uppspännande träd. Totalkostnad: 89



Del B

06 **Avancerad induktion**

a) Visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$n^2 + 6n + 7 \;<\; 20n^2$$

b) Fibonaccis talföljd definieras genom den rekursiva formeln $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med startvärdena $F_1 = 1$ och $F_2 = 1$. Använd den starka versionen av induktion för att visa att följande gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$:

$$F_n \;<\; 2^n$$

Facit: Eftersom den rekursiva definitionen har två basfall behöver även induktionsbeviset det. I induktionssteget kan man anta att påståendet är bevisat för p och $p + 1$, $p \geq 1$, och bevisa påståendet för $p + 2$:

$$F_{p+2} = F_p + F_{p+1} \overset{\text{IA}}{<} 2^p + 2^{p+1} < 2^{p+1} + 2^{p+1} = 2^{p+2}$$

07 **Tal som är delbara med 45**

I uppgifterna nedan avser begreppet *tal* alltid ett naturligt tal.

a) Visa att $45 \mid a$ om och endast om $5 \mid a$ och $9 \mid a$, för alla tal a.

Facit: Vi visar båda delarna av påståendet:

- Antag att $45 \mid a$. Då kan a skrivas som $a = 45 \cdot m$ för något tal $m \geq 1$. Eftersom $45 = 5 \cdot 9$ kan a även skrivas som $a = 5 \cdot 9 \cdot m$, vilket visar att $5 \mid a$ och $9 \mid a$.
- Antag att $5 \mid a$ och $9 \mid a$. Eftersom $9 = 3^2$ gäller även att $3^2 \mid a$. Både 5 och 3 är primtal och förekommer därför i primtalsfaktoriseringen av a, vilket innebär att a kan skrivas som $a = 5 \cdot 3^2 \cdot m$ för något tal $m \geq 1$. Eftersom $5 \cdot 3^2 = 45$ följer att $45 \mid a$. (Observera att $x \mid a$ och $y \mid b$ inte alltid implicerar att $xy \mid a$. Exempel: $x = 2$, $y = 4$, $a = 4$.)

b) Hur många 9-siffriga tal finns det som innehåller varje siffra mellan 1 och 9 exakt en gång och är delbara med 45? Motivera ditt svar.

Facit: Hur kan ett tal som uppfyller villkoren se ut? Från föregående uppgift vet vi att ett tal är delbart med 45 om och endast om det är delbart med 5 och 9. Ett tal är delbart med 9 om dess siffersumma är delbart med 9. Varje tal som uppfyller villkoren har siffersumma 45, som är delbart med 9; detta innebär att varje sådant tal är delbart med 9. Ett tal är delbart med 5 om sista siffran är 0 eller 5. Siffran 0 förekommer inte i ett tal som uppfyller villkoren, vilket innebär att varje sådant tal måste ha 5 som sista siffra. De övriga 8 siffrorna kan fördelas fritt på de kvarvarande 8 platserna. Detta innebär att det finns $8! = 40\,320$ tal som uppfyller villkoren.

c) Ett *palindrom* är ett tal som förblir oförändrat om man läser det baklänges. Vad är det minsta och det största 8-siffriga palindromet som är delbart med 45? (Uteslut ”oäkta” tal där första siffran är 0.) Motivera ditt svar.

Facit: Hur kan ett tal som uppfyller villkoren se ut? Sedan tidigare vet vi att ett tal är delbart med 45 om och endast om det slutar på 0 eller 5 och har en siffersumma som är delbart med 9. Enligt uppgiften får första och därmed även sista siffran i talet inte vara 0, vilket alltså innebär att talet måste börja och sluta på 5. Dessa två siffror bidrar 10 till siffersumman. Den minsta siffersumma som är större än 10 men delbart med 9 är 18; det minsta talet med denna siffersumma är 50044005. Det största tal som uppfyller villkoren är 59944995.

08 **Rysk roulette**

Rysk roulette är ett potentiellt dödligt spel där en spelare laddar en revolver med en enda kula, snurrar revolvertrumman för att slumpa i vilken position det skarpa skottet hamnar, riktar pipan mot sin egen tinning och trycker av. I denna uppgift ska du utgå ifrån att revolvern har sex skott, att en snurrning av trumman ger samma sannolikhet till varje position, och att ett tryck på avtryckaren roterar trumman till nästa position (och alltid i samma riktning).

a) Vad är chansen att överleva n ”försök” i rad för $n = 1, \ldots, 6$

   i) om man snurrar trumman före varje försök?

   ii) utan omsnurrning av trumman?

   Svara med bråk och motivera ditt svar.

   Facit:

   i) Om man snurrar trumman före varje försök är sannolikheterna oberoende av varandra. Detta ger följande tabell:

n	1	2	3	4	5	6
chans	$(\frac{5}{6})^1$	$(\frac{5}{6})^2$	$(\frac{5}{6})^3$	$(\frac{5}{6})^4$	$(\frac{5}{6})^5$	$(\frac{5}{6})^6$

   ii) Om man inte snurrar trumman före varje försök minskar antalet kamrar och antalet kamrar som inte innehåller någon kula med ett:

n	1	2	3	4	5	6
chans	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{0}{1} = 0$

b) Du har hamnat i händerna på en ond maffiaboss. Hen ladder sin revolver med *två* kulor i *intilliggande kamrar*. De andra fyra kamrarna förblir tomma. Hen snurrar trumman, riktar vapnet mot taket och trycker av. Ingenting händer. Hen riktar sedan vapnet mot dig och frågar: ”Nu ska jag trycka av en andra gång. Vill du att jag gör det direkt eller ska jag snurra innan?” Vilket val ger dig större chanser att överleva detta makabra spel? Motivera ditt svar.

   Facit: Om bossen snurrar är chansen att överleva $\frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$ eftersom det finns 6 kamrar och 2 skarpa skott. Om bossen inte snurrar är chansen att överleva $\frac{3}{4}$; detta kan man enklast illustrera med en bild som visar vilka positioner revolvern kan ha och vilka av dessa som kan innehålla en kula. Det är alltså fördelaktigt att inte låta bossen snurra.

c) Hur förändras sannolikheterna för de två valen om maffiabossen laddar två *slumpmässigt utvalda kamrar* (inte nödvändigtvis intilliggande kamrar) av revolvertrumman? Motivera ditt svar.

Facit: Om bossen snurrar är chansen att överleva fortfarande $\frac{6-2}{6} = \frac{2}{3}$. Om bossen inte snurrar är chansen att överleva endast $\frac{3}{5}$, som är något lägre. Nu är det alltså fördelaktigt att låta bossen snurra.