Grunder i matematik och logik (2016)

Tentamen 2016-05-31

Examinator: Marco Kuhlmann

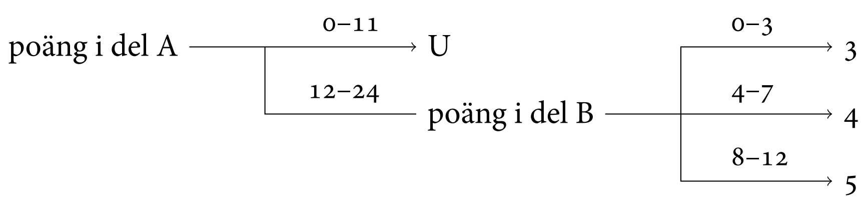
Denna tentamen består av två delar, A och B. Varje del omfattar ett antal frågor som var och en är värd 3 poäng.

Del A omfattar 8 frågor (värda 24 poäng) som kan besvaras mycket kortfattat, om inget annat anges. Varje fråga är uppdelad i tre delar, ordnade i stigande svårighetsgrad. Det krävs minst 12 poäng på denna del för att del B ska rättas.

> Du som är godkänd på minst 5 av kursens duggor behöver inte bearbeta del A utan får automatiskt 12 poäng för den. Skriv i så fall följande på ditt första skrivningspapper: ”Jag är godkänd på del A.” (Observera att detta kommer att verifieras när din skrivning är avanonymiserad!)

Del B omfattar 4 frågor (värda 12 poäng) som kräver utförliga redovisningar med relevant matematisk notation. Frågorna är ordnade i stigande svårighetsgrad.

Betyget på tentamen sätts enligt följande schema:



Lycka till!

Del A

01 Logik

1. Ange sanningstabellen för konjunktion.

   Lösning:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Bevisa följande med hjälp av sanningstabeller. Redovisa steg för steg.

   $$p \to q = \neg p \vee q$$

   Lösning: Vi ställer upp en sanningstabell:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

   För att se att ekvationen gäller kan vi konstatera att de markerade kolumnerna (som svarar mot ekvationens två led) är identiska.

3. Ställ upp sanningstabellen för uttrycket $\neg(p \to q)$. Ange ett annat uttryck som har samma sanningstabell och som inte använder implikation.

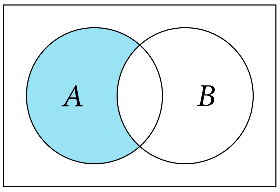
   Lösning: Ett uttryck som uppfyller villkoret är $p \wedge \neg q$:

p	q	$\neg(p \to q)$	$p \wedge \neg q$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

02 Mängdlära

1. Ange venndiagrammet för operationen $A \setminus B$.

   Lösning:

2. Låt $A = \{2, 4, 6, 8\}$ och $B = \{3, 6, 9\}$. Beräkna $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   Lösning: $\{2, 3, 4, 8, 9\}$

3. Ange två oändliga mängder A och B som uppfyller att $A \cap B = \emptyset$.

   Lösning: Två mängder som uppfyller villkoret är

$$A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ är jämnt} \,\} \qquad B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ är udda} \,\}$$

03 Funktioner och relationer

Vi skriver $\mathbb{N}$ för mängden av alla naturliga tal inklusive noll.

1. Vilka av följande egenskaper har den vanliga kvadreringsfunktionen, sedd som en funktion med definitionsmängd och målmängd $\mathbb{N}$?

   injektiv   surjektiv   bijektiv   inga av dessa

   Lösning: injektiv, surjektiv, bijektiv

2. Vilka av följande egenskaper har den vanliga ”mindre än eller lika med”-relationen, sedd som en relation på $\mathbb{N}$?

   reflexiv   symmetrisk   antisymmetrisk   transitiv   inga av dessa

   Lösning: reflexiv, antisymmetrisk, transitiv

3. Ange två transitiva relationer vars union inte är transitiv. Visa detta genom att ange ett motexempel.

   Lösning: Två relationer som uppfyller villkoret är $R_1 = \{(1, 2)\}$, $R_2 = \{(2, 3)\}$. Dessa är transitiva (på ett trivialt sätt), men unionen $R' = R_1 \cup R_2$ är inte transitiv: Det gäller att $(1, 2) \in R'$ och $(2, 3) \in R'$ men $(1, 3) \notin R'$.

04 Rekursion och induktion

Visa med hjälp av induktion att följande likhet gäller för alla naturliga tal $n \geq 1$. Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg).

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) \quad = \quad 2n+n^2$$

Lösning: Induktion på n.

Induktionsbas: $n = 1$. Det gäller att

$$\sum_{i=1}^{1}(2i+1) = 2\cdot 1+1 = 3 \quad \text{(HL)} \qquad \text{och} \qquad 2\cdot 1+1^2 = 3 \quad \text{(VL)}$$

För induktionssteget antar vi att påståendet är bevisat för något naturligt tal $k \geq 1$ och visar att det då även gäller för $k+1$. Vi räknar:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1) = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i+1)\right) + (2(k+1)+1) \overset{\text{IA}}{=} 2k+k^2+2k+2+1 = 2(k+1)+(k+1)^2$$

Vilket skulle visas.

05 Delbarhet och primtal

1. Ange alla (positiva) delare till talet 42. Ringa in de delare som är primtal.

   Lösning: 1 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 6 $\boxed{7}$ 14 21 42

2. Python använder operatorn `%` för moduloräkning. Beräkna:

   a) `(1 + 2) % 4` *Lösning:* 3

   b) `(2 + 2) % 4` *Lösning:* 0

   c) `(3 + 2) % 4` *Lösning:* 1

3. Vad är klockan när du läser detta? Vad kommer den att visa om 100 timmar?

   Lösning: Om 100 timmar kommer klockan visa samma tid som nu, plus 4 timmar. Detta eftersom 100 delad med 24 ger rest 4. Ett möjligt svar hade alltså varit: Klockan visar 15.15 nu; om 100 timmar kommer den att visa 19.15.

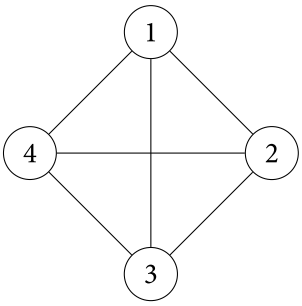
06 Grafer

En oriktad graf $G = (V, E)$ är given genom följande mängder:

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \qquad E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

1. Rita grafen med prickar och streck.

   Lösning:

2. Vilka av följande egenskaper har G?

   är sammanhängande   innehåller cykler   är ett träd   inga av dessa

   Lösning: är sammanhängande, innehåller cykler

3. När man summerar alla gradtal i en viss oriktad graf får man värdet 84. Hur många bågar har grafen?

   Lösning: Varje båge bidrar till gradsumman med 2. Grafen måste alltså ha 42 bågar.

07 Kombinatorik

Svara genom att ange ett konkret tal. Redovisa hur du räknade.

1. Hur många olika ”ord” kan bildas genom att ändra ordningen på bokstäverna i ordet BANDY, om ett ”ord” här får även vara en betydelselös bokstavskombination?

   Lösning: Den relevanta paradigmen är ”med ordning, utan repetition”.

   $$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

2. I en pizzeria kan man välja mellan 5 olika tillbehör till pizzorna. Hur många pizzor kan man baka med 3 olika tillbehör?

Lösning: Eftersom frågan avser *olika* tillbehör är den relevanta paradigmen "utan ordning, utan repetition".

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{60}{6} = 10$$

3. En kompis berättar för dig att hen har en jättebra PIN-kod: alla fyra siffror är olika! Hur många procent av alla PIN-koder har denna egenskap?

   Lösning: Det totala antalet PIN-koder är $10^4 = 10000$. Hur många PIN-koder har olika siffor? Den relevanta paradigmen för denna fråga är "med ordning, utan repetition". Vi vill välja ut siffror från 0 till 9 till de fyra olika platserna i koden.

$$\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

   Detta innebär att 50,40% av alla PIN-koder är sådana att alla fyra siffror är olika.

08 Sannolikhetslära

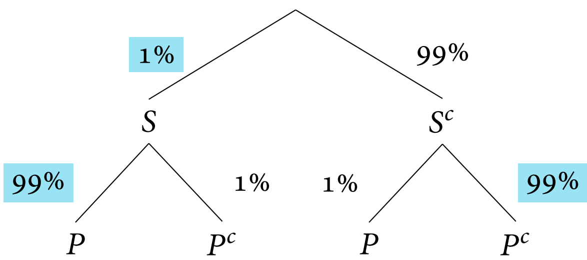
Ett test som ska visa om man har en viss sjukdom har en säkerhet på 99%:

- Om man har sjukdomen kommer man testas positivt i 99% av fallen.
- Om man inte har sjukdomen kommer man testas negativt i 99% av fallen.

Antag att 1% av befolkningen har den relevanta sjukdomen.

1. Rita ett träddiagram för denna fråga och för in alla relevanta sannolikheter i det.

   Lösning: Vi skriver S för händelsen "patienten har sjukdomen" och P för "patienten testas positivt". De markerade sannolikheterna kan direkt avläsas ur uppgiften; de övriga följer från ett enkelt resonemang kring komplementhändelser.



2. Vad är sannolikheten för att en slumpmässigt utvald person testas positivt på sjukdomen? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

   Lösning: Sannolikheten kan tecknas som $P(P)$. Med lagen om total sannolikhet:

   $$P(P) = P(S) \cdot P(P|S) + P(S^c) \cdot P(P|S^c) = 0{,}01 \cdot 0{,}99 + 0{,}99 \cdot 0{,}01 = 0{,}0198$$

   Svaret är därmed 1,98%.

3. Den utvalda personen testas positivt. Vad är sannolikheten att hen har sjukdomen? Svara genom att ange ett procenttal. Visa hur du räknat.

   Lösning: Sannolikheten kan tecknas som $P(S|P)$. Med Bayes' lag:

   $$P(S|P) = \frac{P(P|S)P(S)}{P(P)} = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}01}{0{,}0198} = 0{,}5$$

   Svaret är därmed 50%. (Det är alltså ganska meningslöst att ta testet.)

Del B

09 Induktionsbevis av olikheter

Visa med hjälp av induktion att följande gäller för nästan alla naturliga tal n. Vad betyder ”nästan alla” i det här sammanhanget? Redovisa utförligt (induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg).

$$5^n + 10 \; < \; 6^n$$

10 Fruktkorgar

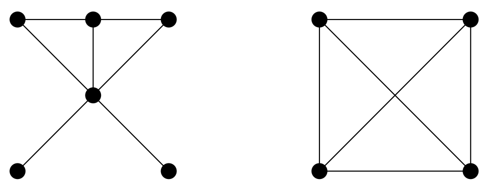
Följande formel ger antalet möjliga sätt att välja k element ur en mängd med n element med repetition och utan hänsyn till ordning:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

1. Visa att denna formel även ger antalet möjliga sätt att välja $n-1$ element ur en mängd med $n+k-1$ element utan repetition och utan hänsyn till ordning.
2. Peter säljer fruktkorgar med apelsiner, bananer och päron. Hur många olika korgar kan han komponera om det ska vara 6 stycken frukt i varje korg?
3. Hur många blir det om varje korg ska innehålla minst en frukt av varje sort?

11 Eulers polyederformel[1]

Här nedanför har vi ritat två grafer.



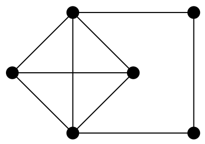
I den högra grafen finns det ett ställe där två bågar korsar varandra, utan att det finns en nod där. Den vänstra grafen innehåller ingen sådan korsning. En sammanhängande graf som kan ritas utan korsningar kallas *plan sammanhängande graf*. Den vänstra grafen är alltså en sådan graf medan den högra grafen inte är det.

[1] Anpassad efter Szabo et al., *Matematik Origo 5*, Sanoma Utbildning 2013, sida 89–91.

För plana sammanhängande grafer gäller *Eulers polyederformel*. Denna formel visar på ett samband mellan antalet noder, bågar och ytor i sådana grafer. Med en *yta* menar vi här ett område som helt omsluts av ett antal bågar. Även området utanför grafen räknas som en yta. Om vi kallar antalet noder för N, antalet bågar för B och antalet ytor för Y så säger Eulers polyederformel att

$$N - B + Y = 2\,.$$

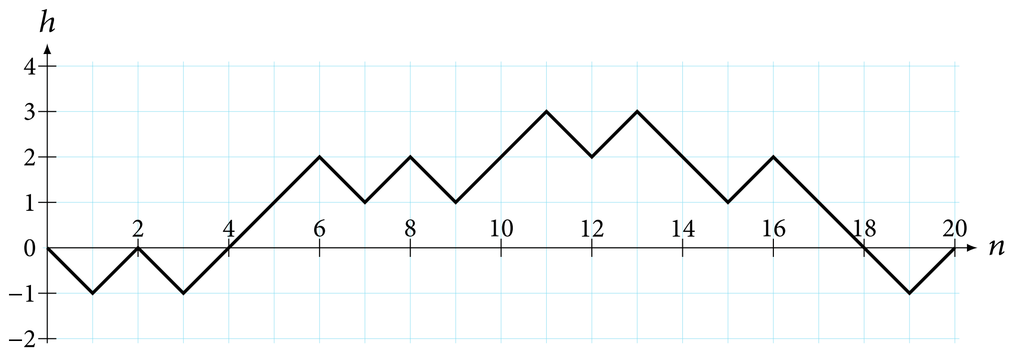
1. Rita en plan sammanhängande graf med 5 noder och 4 ytor.
2. Leonard undersöker grafen här nedan. Han ser att grafen har 6 noder, 9 bågar och 6 ytor. Förbryllad konstaterar han att Eulers polyederformel inte verkar stämma. Förklara för Leonard varför han har fel.



3. Bevisa att Eulers polyederformel gäller för alla plana sammanhängande grafer. Använd induktion över det totala antalet noder och bågar. Induktionsbasen blir således den enklast tänkbara plana sammanhängande grafen, som har en nod och inga bågar. I induktionssteget ska du undersöka vad som händer när man lägger till antingen en ny nod eller en ny båge.

12 Slumpvandringar

Antag att du ”vandrar omkring” i ett koordinatsystem på följande sätt: Du börjar i origo och singlar slant. Om det blir krona så går du ett steg ”till höger och uppåt”; om det blir klave så går du ett steg ”till höger och neråt”. Sedan singlar du slant igen och tar nästa steg, och fortsätter på det viset tills det blir alltför tråkigt. Så här t.ex. skulle en vandring med 20 steg kunna se ut:



Du gör en vandring och vill veta: ”Hur sannolikt är det att jag kommer att avsluta min vandring på nollinjen, som i exemplet ovan?”

1. Hur många olika vandringar finns det som slutar på nollinjen? Härled en formel för vandringar med n steg. Ledning: Skilj mellan två fall.
2. Förklara varför alla vandringar med ett givet antal steg är lika sannolika. Härled en formel som ger sannolikheten för en vandring med n steg.
3. Härled en formel som ger sannolikheten för att en vandring med n steg slutar på nollinjen. Beräkna formelns värde för en vandring med 6 steg.