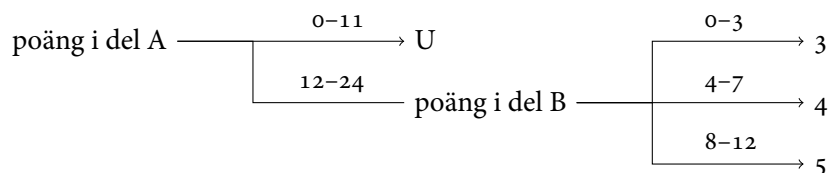


## Tentamen 2015-06-01

Marco Kuhlmann

Denna tentamen består av två delar: del A, som innehåller uppgifter 1–8, och del B, som innehåller uppgifter 9–12. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betyget sätts enligt följande schema:



Dina inlämningar till del B kommer endast att rättas om du har minst 12 poäng i del A. Rättningen av del A kommer då att avbrytas.

**Lycka till!**

### Del A

1. Ange symboler och sanningstabeller för följande logiska operatorer:

- (a) negation                      (b) disjunktion                      (c) implikation

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift.

(a) negation

$p$	$\neg p$
0	1
1	0

(b) disjunktion

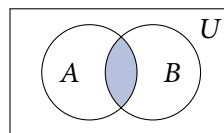
$p$	$q$	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) implikation

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

2. Låt  $A$  och  $B$  vara delmängder till ett gemensamt universum  $U$ . Mängdoperationer kan beskrivas med hjälp av mängdbyggare och Venn-diagram. Tag snitt som exempel:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$



Ange motsvarande definitioner och Venn-diagram för följande mängdoperationer. Använd endast  $\in$  och  $\notin$  och de logiska operatorerna konjunktion, disjunktion och negation.

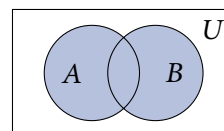
(a)  $A \cup B$

(b)  $A^c \setminus B$

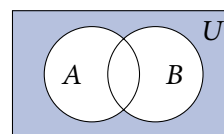
(c)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift.

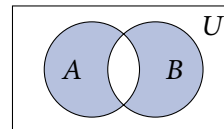
(a)  $\{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$



(b)  $\{x \in U : x \notin A \wedge x \notin B\}$



(c)  $\{x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$



3. Undersök i varje fall om relationen är (i) reflexiv, (ii) symmetrisk, (iii) antisymmetrisk, (iv) transitiv. Ange antingen ett kort bevis (om relationen har egenskapen) eller ett motexempel (om relationen inte har egenskapen).

(a)  $R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a < b\}$

(b)  $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$

(c)  $R_3 = R_1 \cup R_2$

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift. Om detta skulle ge 0 poäng ges 1 poäng om minst 4 egenskaper har avgjorts på ett korrekt sätt.

- (a) inte reflexiv ( $0 \not< 0$ ), inte symmetrisk ( $0 < 1$  men  $1 \not< 0$ ), antisymmetrisk (finns inga tal  $a, b$  sådana att  $a < b$  och  $b < a$ ), transitiv (om  $a < b$  och  $b < c$  så  $a < c$ )
- (b) reflexiv ( $a = a$  för alla tal), symmetrisk (om  $a = b$  så även  $b = a$ ), antisymmetrisk (om  $a = b$  och  $b = a$  så  $a = b$  trivialt), transitiv (om  $a = b$  och  $b = c$  så  $a = c$ )

(c) reflexiv ( $a \leq b$  för alla tal), inte symmetrisk ( $0 \leq 1$  men  $1 \not\leq 0$ ), antisymmetrisk (om  $a \leq b$  och  $b \leq a$  så  $a = b$ ), transitiv (om  $a \leq b$  och  $b \leq c$  så  $a \leq c$ )

4. Bevisa följande utsaga med hjälp av induktion. Redovisa utförligt. Glöm inte att tydligt markera var i beviset du använder induktionsantagandet.

$$\text{För alla } n \in \mathbb{N} \text{ gäller att } \sum_{i=1}^n 2i = n^2 + n.$$

**Rättning:** Poängavdrag (1 poäng) för: inkorrekt basfall (t.ex.  $n = 1$  istället för  $n = 0$ ); det är oklart vad som ska visas ( $n + 1$ ); induktionsantagandet har inte angivits ( $n - 1$ ) eller är oklar; induktionsantagandet har inte markerats eller inte markerats på rätt ställe; felaktiga eller inkorrekta beräkningar.

Basfall:  $n = 0$ . I detta fall är  $\sum_{i=1}^n 2i = \sum_{i=1}^0 2i = 0$  och  $n^2 + n = 0^2 + 0 = 0$ .

Induktionssteg:  $n > 0$ . Induktionsantagande:  $\sum_{i=1}^{n-1} 2i = (n-1)^2 + (n-1)$ . Vi räknar:

$$\sum_{i=1}^n 2i = \left( \sum_{i=1}^{n-1} 2i \right) + 2n \stackrel{\text{IA}}{=} (n-1)^2 + (n-1) + 2n = n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 2n = n^2 + n$$

5. Ange en rekursiv definition för Euklides algoritmen och använd den för att bestämma den största gemensamma delaren av 693 och 286. Ange alla rekursiva anrop.

**Rättning:** 2 poäng för den rekursiva definitionen:

```
def gcd(a, b):
    return a if b == 0 else gcd(b, a % b)
```

1 poäng för en korrekt uträkning inkl. alla rekursiva anrop:

$$\begin{aligned} \text{gcd}(693, 286) &= \text{gcd}(286, 693 \% 286) \\ &= \text{gcd}(286, 121) = \text{gcd}(121, 286 \% 121) \\ &= \text{gcd}(121, 44) = \text{gcd}(44, 121 \% 44) \\ &= \text{gcd}(44, 33) = \text{gcd}(33, 44 \% 33) \\ &= \text{gcd}(33, 11) = \text{gcd}(11, 33 \% 11) \\ &= \text{gcd}(11, 0) = 11 \end{aligned}$$

6. Ett svenskt registreringsskylt består i princip av tre bokstäver ur det svenska alfabetet följt av tre siffror mellan 0 och 9; det finns dock 6 bokstäver (I, Q, V, Å, Ä, Ö) och 90 trebokstavskombinationer (t.ex. DUM, FUL, RAP) som inte används.
- Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick använda alla bokstäver och alla trebokstavskombinationer?
  - Hur många olika registreringsskyltar skulle det finnas om man fick göra som i (a), men varje bokstav och varje siffra fick förekomma endast en enda gång?
  - Hur många olika registreringsskyltar finns det i verkligheten, dvs. när man tar hänsyn till de oanvända bokstäverna och trebokstavskombinationerna?
- Ange i varje fall ett uttryck för att räkna ut svaret. Du behöver inte förenkla uttrycket.

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift.

- $29^3 \cdot 10^3$
- $29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
- $((29 - 6)^3 - 90) \cdot 10^3$

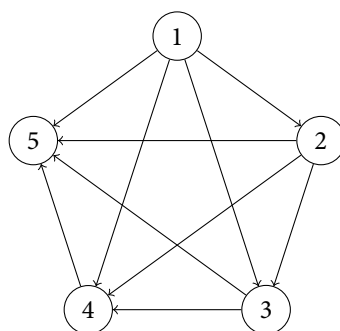
7. Vi definierar en riktad graf  $G = (V, E)$  genom följande mängder:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad E = \{(a, b) \in V \times V : a < b\}$$

- Hur många kanter har grafen?
- Ange en enkel väg från 1 till 3.
- Ange ingraden hos nod 3.
- Ange utgraden hos nod 3.
- Är grafen sammanhängande?
- Innehåller grafen en cykel?

Tips: Börja med att rita grafen!

**Rättning:** 1 poäng per två korrekta svar. Inga poäng om man utgått från fel graf. Grafen (som är en turneringsgraf) ser ut så här:



- (a) Grafen har 10 kanter. (d) Utgraden hos nod 3: 2  
 (b) Enkel väg från 1 till 3: 1, 2, 3 (e) Grafen är sammanhängande.  
 (c) Ingraden hos nod 3: 2 (f) Grafen är inte cyklisk.

8. I ett laboratorium har en sensor installerats som ska slå larm om rumsluften innehåller för mycket kolmonoxid. Om gashalten är för hög slår sensorn larm med 99% säkerhet; men det finns en chans på 2% att sensorn slår larm trots att gashalten är normal. Gränsvärdena för kolmonoxid överskrids i genomsnitt 3 dagar per år (= 365 dagar).

- (a) Översätt uppgiftstexten till sannolikheter. Använd händelserna  $L$  ”sensorn slår larm” och  $K$  ”luften innehåller för mycket kolmonoxid”.  
 (b) Hur stor är sannolikheten att sensorn slår larm en vanlig dag? Ange resultatet som ett bråkital. Motivera ditt svar.  
 (c) Om sensorn slår larm, hur stor är då sannolikheten att luften faktiskt innehåller för mycket kolmonoxid? Ange resultatet som ett bråkital. Motivera ditt svar.

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift.

- (a) Uppgiftstexten innehåller direkt information om följande sannolikheter:

$$P(K) = \frac{3}{365} \quad P(L|K) = \frac{99}{100} \quad P(L|K^c) = \frac{2}{100}$$

Utifrån dessa kan man även härleda följande sannolikheter:

$$P(K^c) = \frac{362}{365} \quad P(L^c|K) = \frac{1}{100} \quad P(L^c|K^c) = \frac{98}{100}$$

- (b) Den efterfrågade sannolikheten är  $P(L)$ . Enligt lagen om total sannolikhet gäller:

$$P(L) = P(K) \cdot P(L|K) + P(K^c) \cdot P(L|K^c) = \frac{3}{365} \cdot \frac{99}{100} + \frac{362}{365} \cdot \frac{2}{100} \approx 0,028$$

- (c) Den efterfrågade sannolikheten är  $P(K|L)$ . Enligt Bayes lag gäller:

$$P(K|L) = \frac{P(L|K) \cdot P(K)}{P(L)} = \frac{99}{100} \cdot \frac{3}{365} \cdot \frac{1}{P(L)} \approx 0,29$$

## Del B

Svara utförligt!

9. Visa att  $2^n < n!$  för alla naturliga tal  $n > 3$ .

**Rättning:** Se kursbokens hemsida. 1 poäng för korrekt basfall, 1 poäng för korrekt induktionsantagande, 1 poäng för fullständigt och korrekt induktionssteg. Poängavdrag om man inte angett var i beviset man använt induktionsantagandet.

10. Låt  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ . En *binär logisk operator* är en funktion  $f: \mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ . Exempel på binära logiska operatorer är konjunktion, disjunktion och implikation.

- (a) Hur många olika binära logiska operatorer finns det?  
 (b) Följande Python-funktion implementerar konjunktion:

```
def f(x, y): return x and y
```

Ange motsvarande Python-funktioner för alla möjliga binära logiska operatorer. De enda reserverade orden som får förekommer till höger om return är and och not.

**Rättning:** 1 poäng vardera för korrekt antal (16), konstruktionsidé och fullständigt korrekt lösning. Den enklaste lösningen är att skriva Python-kod som implementerar de möjliga sanningstabellerna. Man kan spara tid och plats genom att inse att hälften av funktionerna kan skrivas som negationer av andra funktioner. Följande funktion t.ex. implementerar negerad konjunktion:

```
def f_neg(x, y): return not(f(x, y))
```

11. Låt  $G = (V, E)$  vara en riktad graf.

- (a) Visa att om  $G$  är acyklisk så är  $E$  antisymmetrisk.  
 (b) Låt  $E_1, E_2 \subseteq V \times V$ . Visa eller motbevisa: (i) Om  $E_1$  och  $E_2$  är antisymmetriska så även  $E_1 \cap E_2$ . (ii) Om  $E_1$  och  $E_2$  är antisymmetriska så även  $E_1 \cup E_2$ .

**Rättning:** 1 poäng per fullständigt korrekt deluppgift.

- (a) Det kan inte finnas några  $a, b \in V$  sådana att  $(a, b) \in E$  och  $(b, a) \in E$ , inte ens för  $a = b$ , eftersom det inte finns några cykler i  $G$ .

- (b) För (i), antag att  $(a, b) \in E_1 \cap E_2$  och  $(b, a) \in E_1 \cap E_2$ . Vi visar att  $a = b$ . Vi har  $(a, b) \in E_1$  och  $(b, a) \in E_1$ , och eftersom  $E_1$  är antisymmetrisk följer  $a = b$ . (Man ser att det räcker att en av relationerna är antisymmetrisk.) Motexempel för (ii):  $V = \{1, 2\}$ ,  $E_1 = \{(1, 2)\}$ ,  $E_2 = \{(2, 1)\}$ . Både  $E_1$  och  $E_2$  är antisymmetriska, men  $E_1 \cup E_2$  är inte antisymmetrisk då  $(1, 2) \in E_1 \cup E_2$  och  $(2, 1) \in E_1 \cup E_2$  men  $1 \neq 2$ .

12. Bevisa att det finns oändligt många primtal.

**Rättning:** Se föreläsningsmanuskriptet. 1 poäng vardera för korrekt definition, ansats (visa att varje följd av primtal kan utökas med ytterligare ett primtal) och fullständigt korrekt bevis.