# TDDI16 – Föreläsning 3

## Symboltabeller och träd

Filip Strömbäck

LINKÖPING UNIVERSITY

# Planering

| Vecka | Fö | Lab |
|---|---|---|
| 36 | Komplexitet, Linjära strukturer | ---- |
| 37 | Träd, AVL-träd | 1--- |
| 38 | Hashning | 12-- |
| 39 | Grafer och kortaste vägen | 12-- |
| 40 | Fler grafalgoritmer | -23- |
| 41 | Sortering | --3- |
| 42 | Mer sortering, beräkningsbarhet | --34 |
| 43 | Tentaförberedelse | ---4 |

LINKÖPING UNIVERSITY

# Problem

Du håller på att skriva en rapport, och för att se till att göra ett gott intryck vill du se till att du inte har några stavfel i rapporten. Du har hittat en bra ordlista på internet (och i `/usr/share/dict/words`), och tänker att det inte kan vara särskilt svårt att skriva ett program som kontrollerar alla ord i rapporten efter stavfel.

Ordlistan innehåller $n$ ord, rapporten innehåller $m$ ord.

Hur kan vi göra detta på ett bra sätt?

# Hur svårt kan det vara?

```
int main() {
  vector<string> d = read_dict();

  int count{};
  string word;
  while (cin >> word) {
    if (find(d.begin(), d.end(), word) == d.end())
      cout << "Wrong: " << word << endl;
    count++;
  }
  cout << "Checked " << count << " words" << endl;
  return 0;
}
```

# Testkörning

```
$ time spellcheck < thesis.txt
99171 words in the dictionary
...
Checked 38040 words

real 0m36.728s
user 0m36.663s
sys  0m0.047s
```

Inte jättebra...

# Analys – `find`

```
template <typename Iter, typename Elem>
Iter find(Iter begin, Iter end, Elem elem) {

  for (Iter i = begin; i != end; ++i) {
    if (*i == elem) {
      return i;
    }
  }
  return end;
}
```

# Analys – `find`

```
template <typename Iter, typename Elem>
Iter find(Iter begin, Iter end, Elem elem) {

  for (Iter i = begin; i != end; ++i) {
    if (*i == elem) {
      return i;
    }
  }
  return end;
}
```

$\mathcal{O}(1)$ $n$ gånger

# Analys – `find`

```
template <typename Iter, typename Elem>
Iter find(Iter begin, Iter end, Elem elem) {

  for (Iter i = begin; i != end; ++i) {
    if (*i == elem) {
      return i;
    }
  }
  return end;
}
```

$\mathcal{O}(1)$ — $n$ gånger

Totalt: $\mathcal{O}(n \cdot 1) = \mathcal{O}(n)$ Vad är *bästa* och *värsta* fall?

# Bästa och värsta fallet

Vad kan vi säga om bästa och värsta fallet på `find`?

`find`, bästa fall $\Theta(1)$

`find`, värsta fall $\Theta(n)$

Vad är **relevant** att säga? Vad är **tillräckligt** att säga?

# Bästa och värsta fallet

Vad kan vi säga om bästa och värsta fallet på `find`?

`find`, bästa fall $\Theta(1)$

`find`, värsta fall $\Theta(n)$

`find`, medelfall $\Theta(n)$

Vad är **relevant** att säga? Vad är **tillräckligt** att säga?

# Bästa och värsta fallet

Vad kan vi säga om bästa och värsta fallet på `find`?

| | | | |
|---|---|---|---|
| `find`, bästa fall | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\Omega(1)$ |
| `find`, värsta fall | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n)$ | $\Omega(n)$ |
| `find`, medelfall | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n)$ | $\Omega(n)$ |

Vad är **relevant** att säga? Vad är **tillräckligt** att säga?

# Bästa och värsta fallet

Vad kan vi säga om bästa och värsta fallet på `find`?

| | | | |
|---|---|---|---|
| `find`, bästa fall | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(1)$ | $\Omega(1)$ |
| `find`, värsta fall | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n)$ | $\Omega(n)$ |
| `find`, medelfall | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n)$ | $\Omega(n)$ |
| `find` | - | $\mathcal{O}(n)$ | $\Omega(1)$ |

Vad är **relevant** att säga? Vad är **tillräckligt** att säga?

# Analys

Givet: $n$ ord i ordlista, $m$ ord i rapporten

```
while (cin >> word) {
  if (find(...) == d.end())
    cout << ...;
}
```

$\mathcal{O}(n)$
$\mathcal{O}(1)$

$\Big)\ m$ gånger

# Analys

Givet: $n$ ord i ordlista, $m$ ord i rapporten

```
while (cin >> word) {
  if (find(...) == d.end())
    cout << ...;
}
```

$\mathcal{O}(n)$
$\mathcal{O}(1)$

$\Big)\ m$ gånger

Totalt: $\mathcal{O}(m \cdot (1 + n)) = \mathcal{O}(m + mn) = \mathcal{O}(mn)$

# Analys

Givet: $n$ ord i ordlista, $m$ ord i rapporten

```
while (cin >> word) {
  if (find(...) == d.end())
    cout << ...;
}
```

$\mathcal{O}(n)$
$\mathcal{O}(1)$

$\Big)\ m$ gånger

Totalt: $\mathcal{O}(m \cdot (1 + n)) = \mathcal{O}(m + mn) = \mathcal{O}(mn)$

Om $m \approx n \implies \mathcal{O}(n^2)$: bra eller dåligt?

# Analys – vad behövs?

# Analys – vad behövs?

| | `vector` |
|---|---|
| Insättning<br>Medlemstest | |
| Ladda ordlista | |
| Stavningskontroll | |

# Analys – vad behövs?

| | `vector` | Önsketänkande |
|---|---|---|
| Insättning | $\Theta(1)$[1] | |
| Medlemstest | $\mathcal{O}(n)$ | |
| Ladda ordlista | $\Theta(n)$ | |
| Stavningskontroll | $\mathcal{O}(mn)$ | |
| $m \approx n$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | |

[1] Medelfall

# Analys – vad behövs?

| | `vector` | Önsketänkande |
|---|---|---|
| Insättning | $\Theta(1)$[1] | $\Theta(1)$ |
| Medlemstest | $\mathcal{O}(n)$ | $\Theta(1)$ |
| Ladda ordlista | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ |
| Stavningskontroll | $\mathcal{O}(mn)$ | $\Theta(m)$ |
| $m \approx n$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\Theta(n)$ |

Kan vi konstruera en sådan datastruktur?

[1] Medelfall

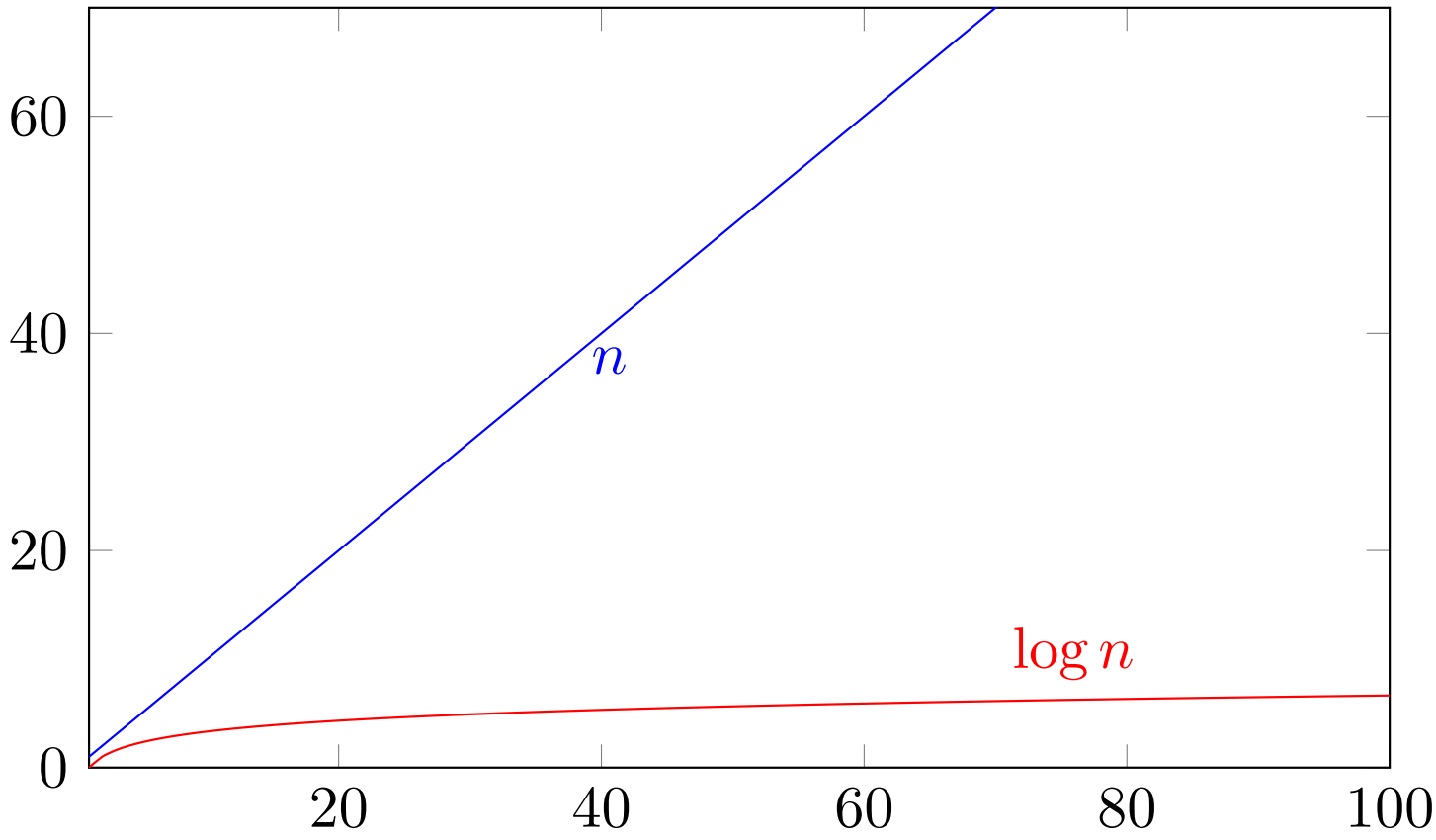
# Analys – vad behövs?

| | `vector` | Önsketänkande | Mål idag |
|---|---|---|---|
| Insättning | $\Theta(1)$[1] | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log(n))$ |
| Medlemstest | $\mathcal{O}(n)$ | $\Theta(1)$ | $\mathcal{O}(\log(n))$ |
| Ladda ordlista | $\Theta(n)$ | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n \log(n))$ |
| Stavningskontroll | $\mathcal{O}(mn)$ | $\Theta(m)$ | $\mathcal{O}(m \log(n))$ |
| $m \approx n$ | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\Theta(n)$ | $\mathcal{O}(n \log(n))$ |

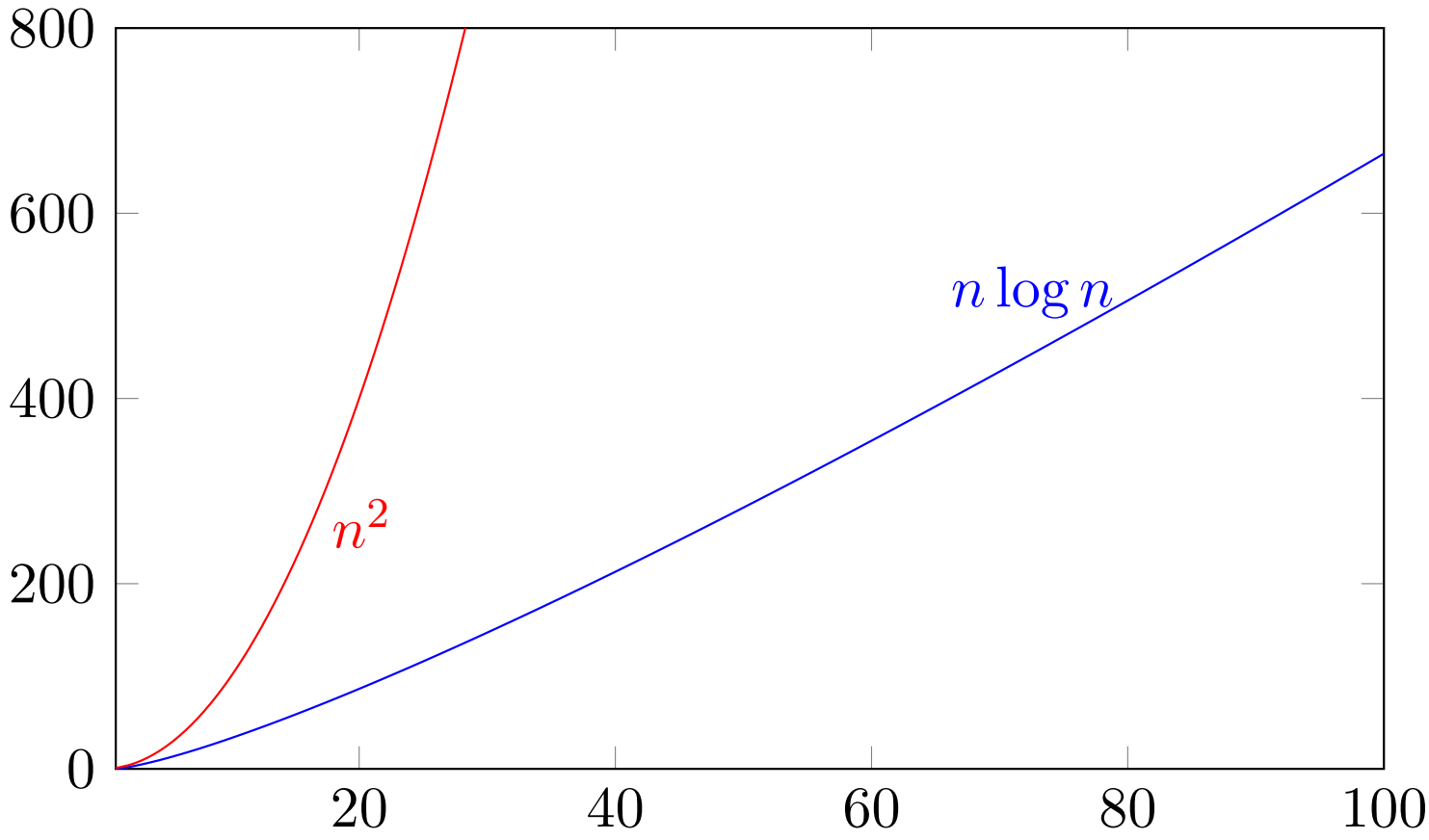
Kan vi konstruera en sådan datastruktur?

[1] Medelfall

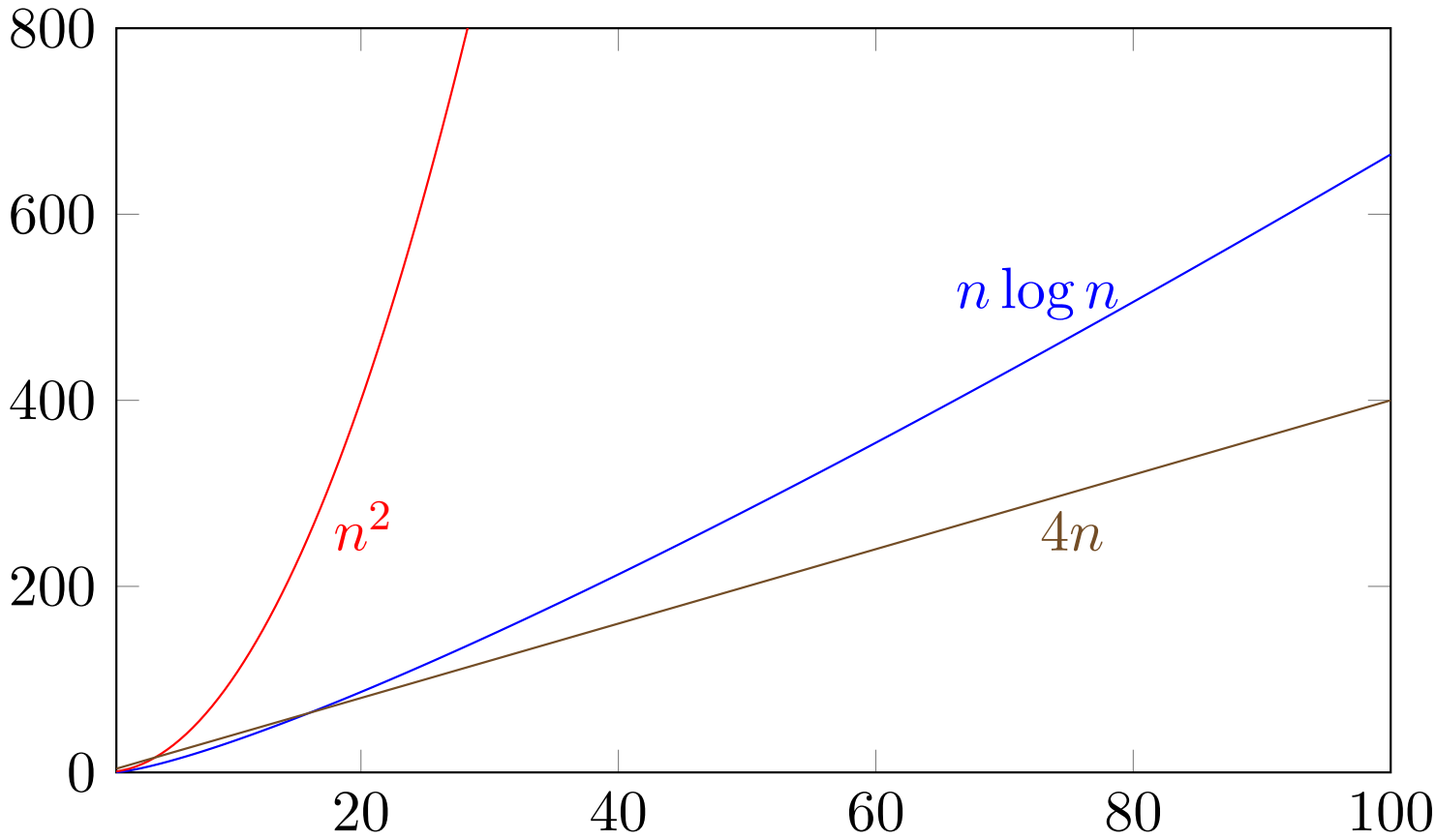
# $\Theta(n)$ vs. $\Theta(\log n)$



# $\Theta(n^2)$ vs. $\Theta(n \log n)$



# $\Theta(n^2)$ vs. $\Theta(n \log n)$



# ADT dictionary (symboltabell)

En **oordnad** mängd av par, **nyckel-värde**.

Ofta ordnad efter **nyckel** på något sätt.

| | |
|---|---|
| size() | Antal element i datastrukturen |
| insert(k, v) | Lägg till ett nyckel-värde-par |
| remove(k) | Ta bort paret med nyckeln **k** |
| contains(k) | Finns nyckeln **k**? |
| get(k) | Hämta värdet för nyckeln **k** |

# ADT dictionary (symboltabell)

En **oordnad** mängd av par, **nyckel-värde**.

Ofta ordnad efter **nyckel** på något sätt.

| | |
|---|---|
| size() | Antal element i datastrukturen |
| insert(k, v) | Lägg till ett nyckel-värde-par |
| remove(k) | Ta bort paret med nyckeln **k** |
| contains(k) | Finns nyckeln **k**? |
| get(k) | Hämta värdet för nyckeln **k** |

I C++: `map`, `unordered_map`, ...
Utan värde: `set`, `unordered_set`, ...

# Vi testar set...

```
int main() {
  set<string> d = read_dict();

  int count{};
  string word;
  while (cin >> word) {
    if (d.find(word) == d.end())
      cout << "Wrong: " << word << endl;
    count++;
  }
  cout << "Checked " << count << " words" << endl;
  return 0;
}
```

# Testkörning

```
$ time spellcheck < thesis.txt
99171 words in the dictionary
...
Checked 38040 words

real 0m0.475s
user 0m0.288s
sys  0m0.016s
```

Nu börjar det likna något!

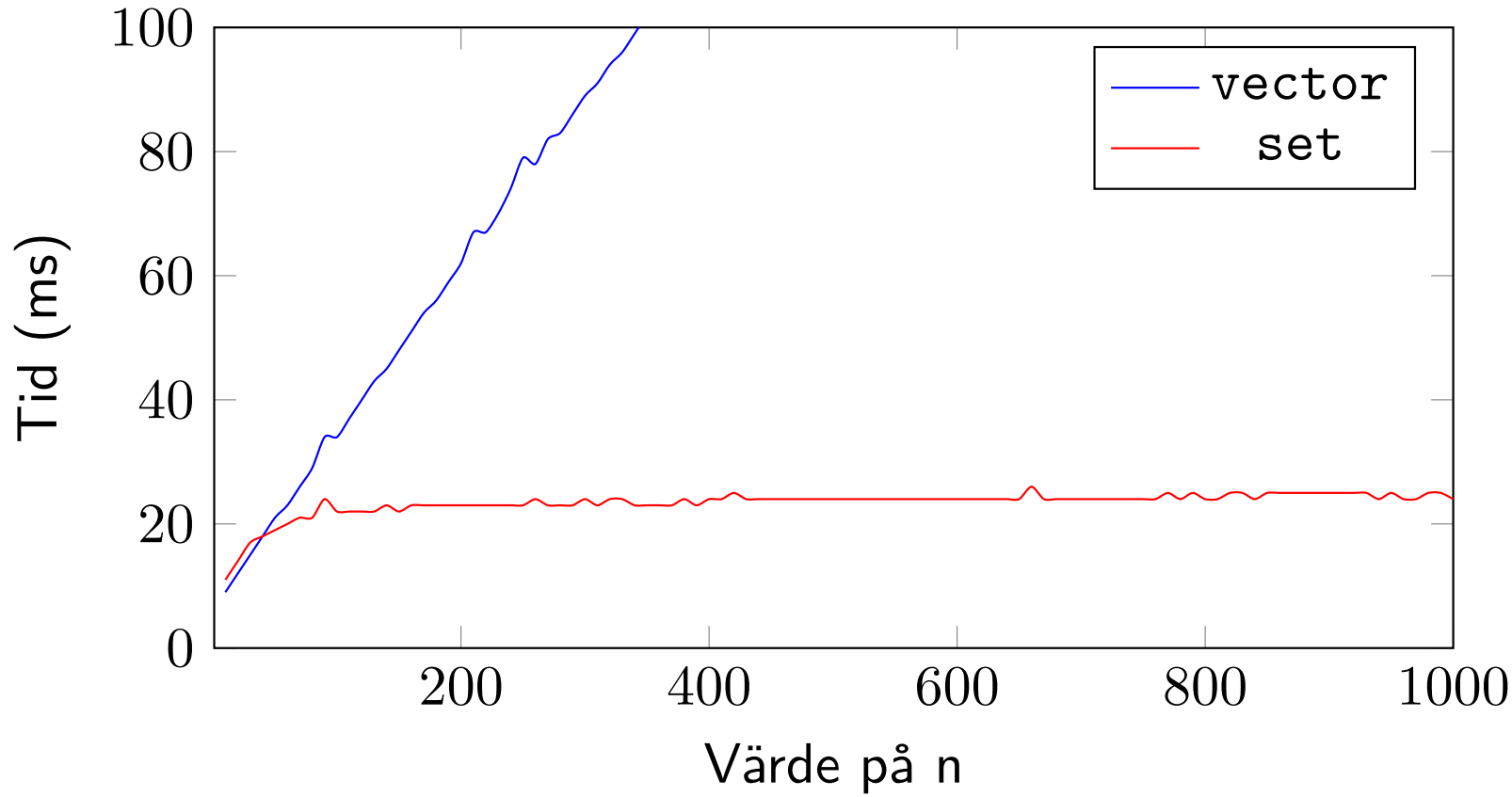
# Analys

```
while (cin >> word) {
  if (d.find(...) == d.end())
    cout << ...;
}
```

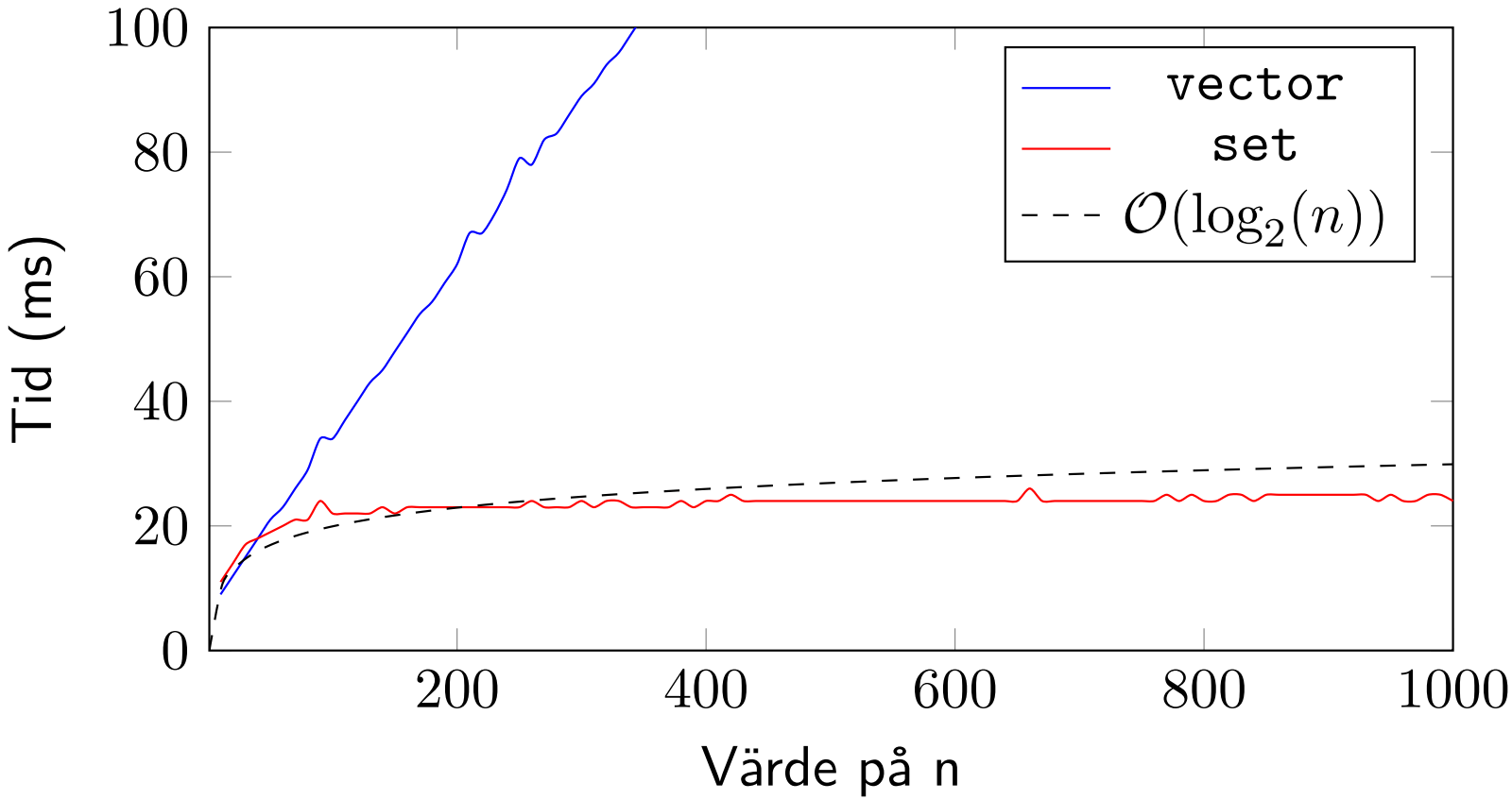
$\left.\begin{array}{l} \mathcal{O}(?) \\ \mathcal{O}(1) \end{array}\right\} m$ gånger

Vad har `find` för komplexitet?

# Vi testar! 100 000 körningar per indata



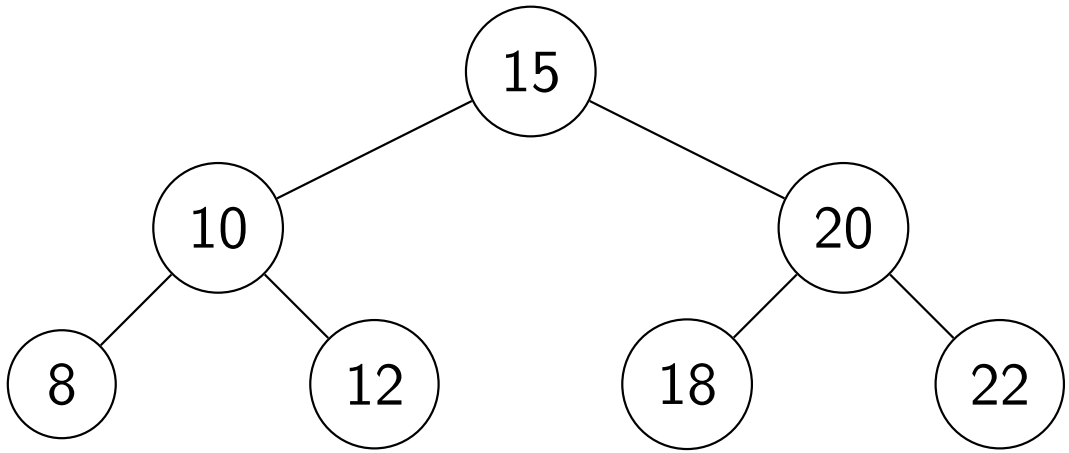
# Vi testar! 100 000 körningar per indata



LINKÖPING UNIVERSITY

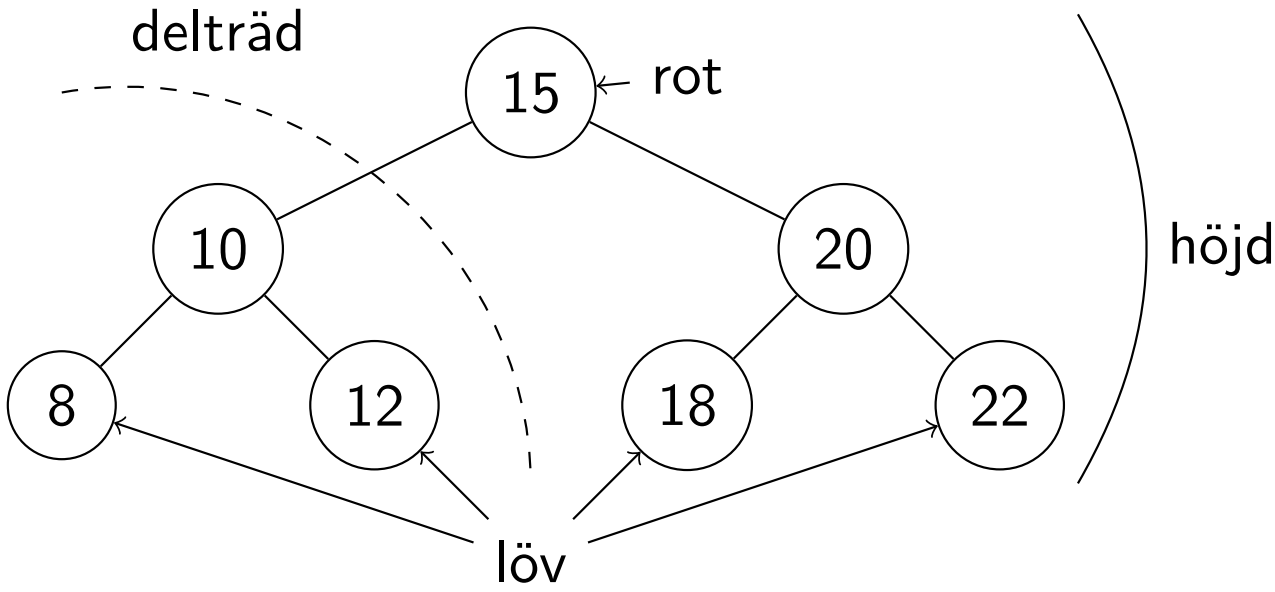
# Hur är `set` implementerad?

Idé: Minimera söktid genom att använda ett sökträd!



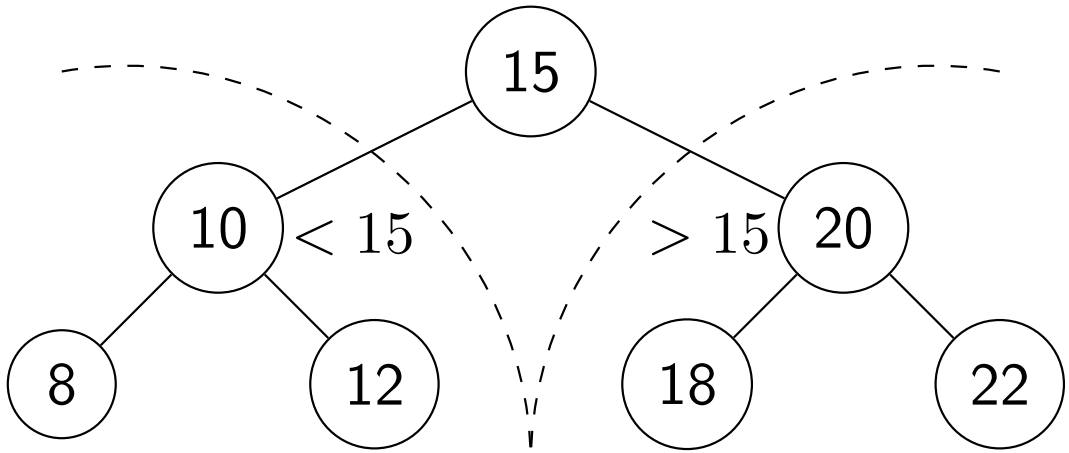
# Hur är `set` implementerad?

Idé: Minimera söktid genom att använda ett sökträd!



# Hur är `set` implementerad?

Idé: Minimera söktid genom att använda ett sökträd!



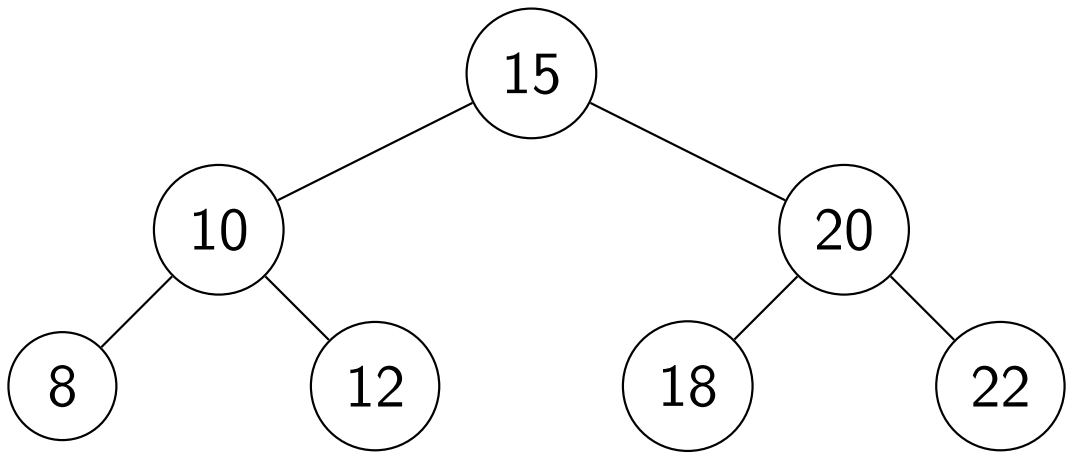
# Hitta element i ett sökträd

```
class Node {
public:
  Node(int v, Node *l, Node *r) :
    v{v}, l{l}, r{r} {}

  int v;
  Node *l;
  Node *r;
};
```

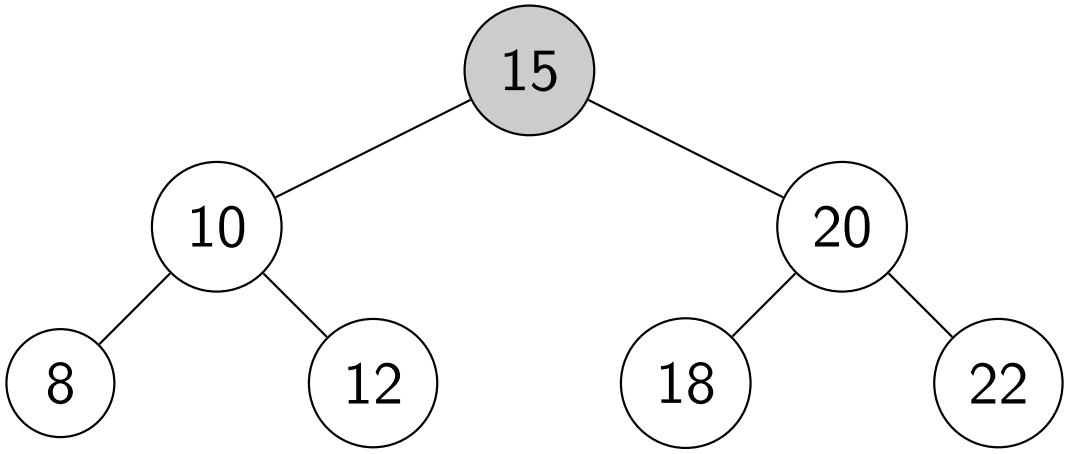
# Hitta element i ett sökträd

```
Node *find(Node *root, int value) {
  if (!root)
    return nullptr;

  if (value < root->v) {
    return find(root->l, value);
  } else if (value > root->v) {
    return find(root->r, value);
  } else { // value == root->v
    return root;
  }
}
```

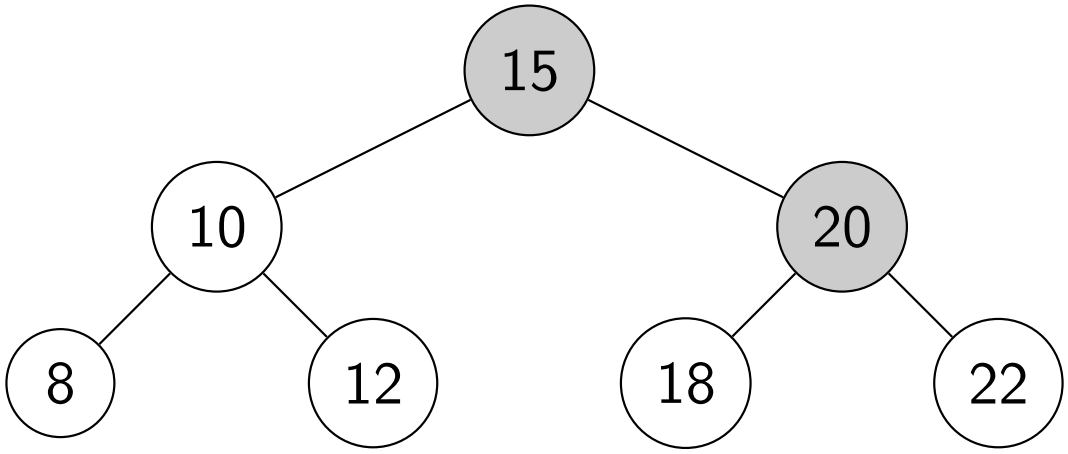
# Exempel: Hitta 18



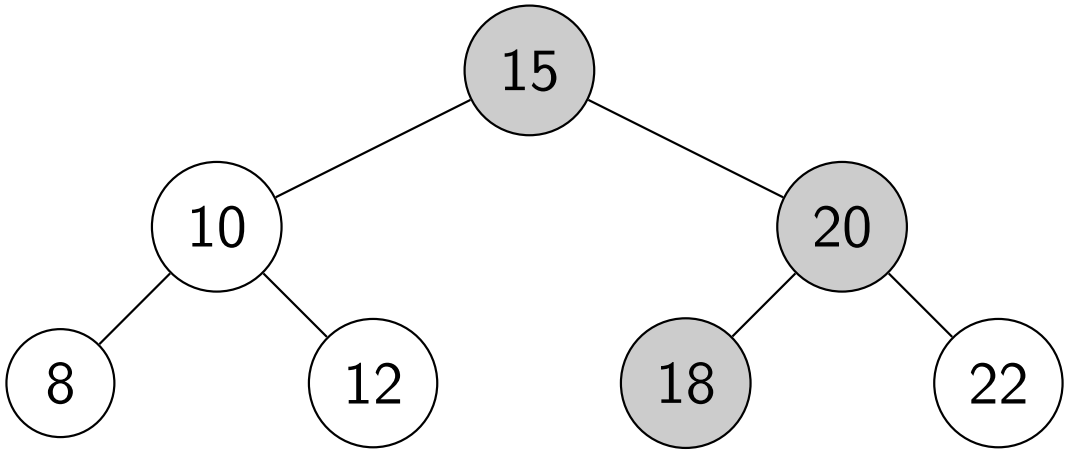
# Exempel: Hitta 18



# Exempel: Hitta 18



# Exempel: Hitta 18




Komplexitet? Värsta och bästa fall?

# Insättning

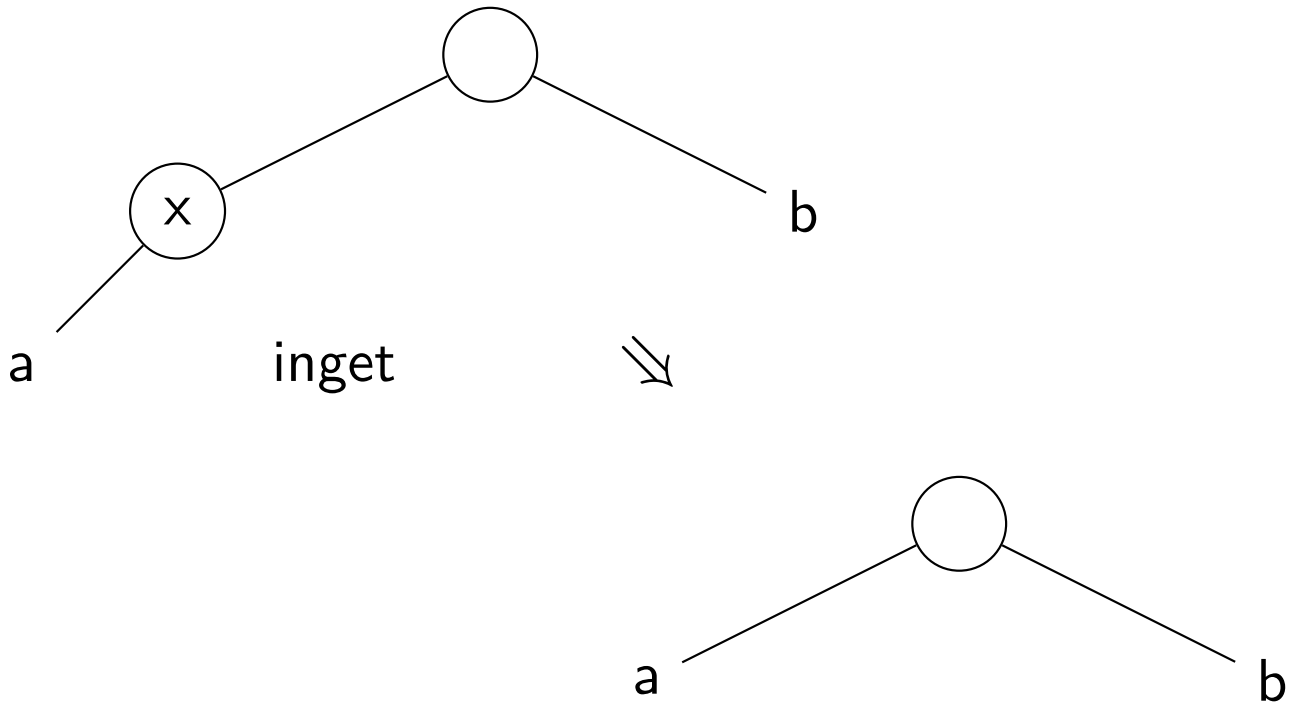
Insättning görs på liknande sätt. Testa exempelvis:

10, 5, 15, 20, 7, 12, 30, 17, 18, 40, 50, ...

Komplexitet?

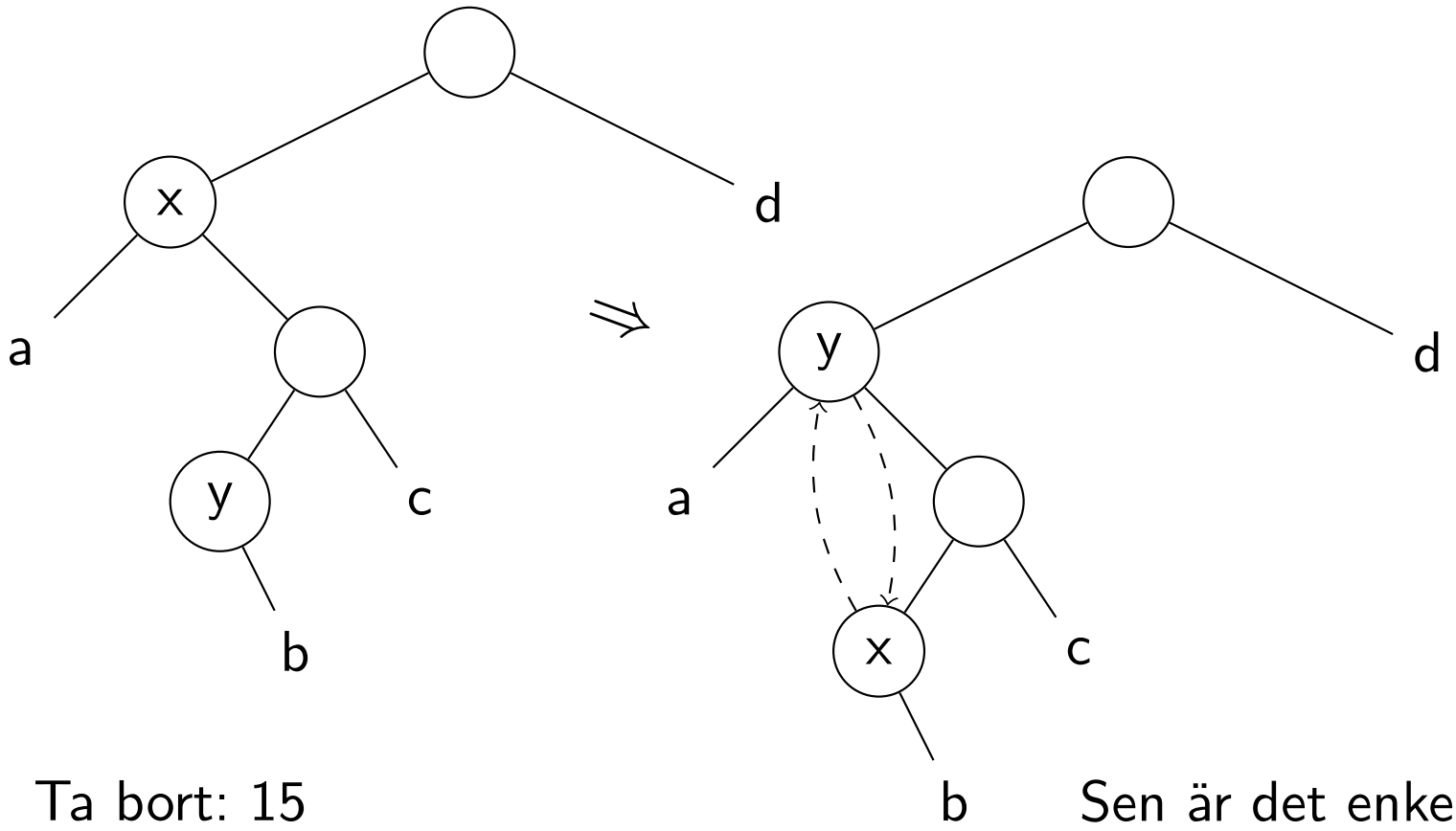
Vad kan vi säga om höjden av trädet?

# Borttagning – enkelt fall




Ta bort: 7

# Borttagning – generellt fall




Ta bort: 15

Sen är det enkelt!

# Höjden av ett sökträd?

$h$: trädets höjd

$n$: antal noder i trädet

I värsta fall: $h = n$

I bästa fall: $n = 2^h - 1 \implies h = \log_2(n+1)$

$\Rightarrow$ Vi vill se till att sökträdet är balanserat!

# Tidskomplexitet hos ett BST

| | Obalanserat | Balanserat |
|---|---|---|
| Insättning | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\log_2(n))$[1] |
| Medlemstest | $\mathcal{O}(n)$ | $\mathcal{O}(\log_2(n))$ |
| Ladda ordlista | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n \log_2(n))$[1] |
| Stavningskontroll | $\mathcal{O}(n^2)$ | $\mathcal{O}(n \log_2(n))$ |

[1] Om det inte är dyrt att balansera trädet

LINKÖPING UNIVERSITY

# Balansering av träd

Sökträdet blir ineffektivt om det inte är balanserat.

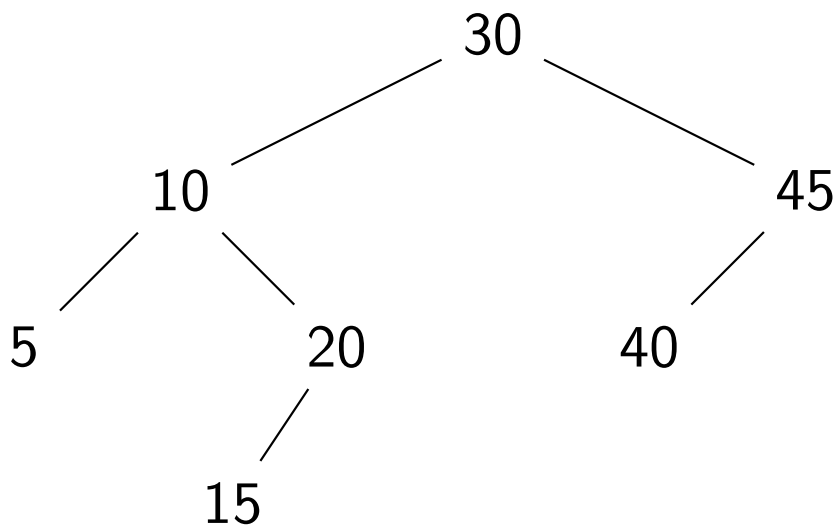
Idé: Håll koll på djupet i varje nod och ”rotera” om det skiljer för mycket.

Viktiga frågor:

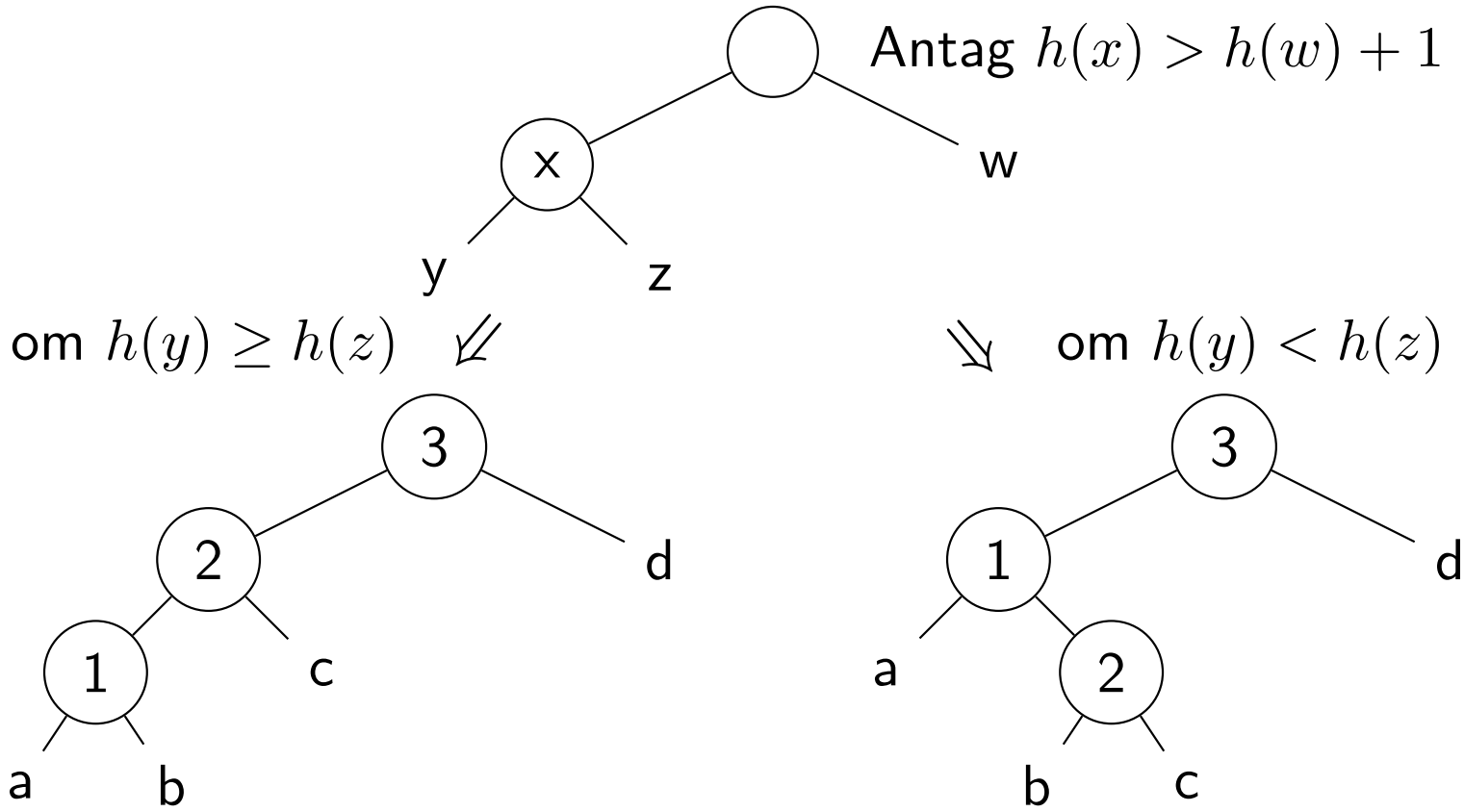
- Kan vi uppdatera höjderna inom tidsramarna?
- Vilka noder kan behöva ”roteras”?
- Hur lång tid tar det?
- Hur stor obalans ska vi tolerera?

# AVL-träd – Idé

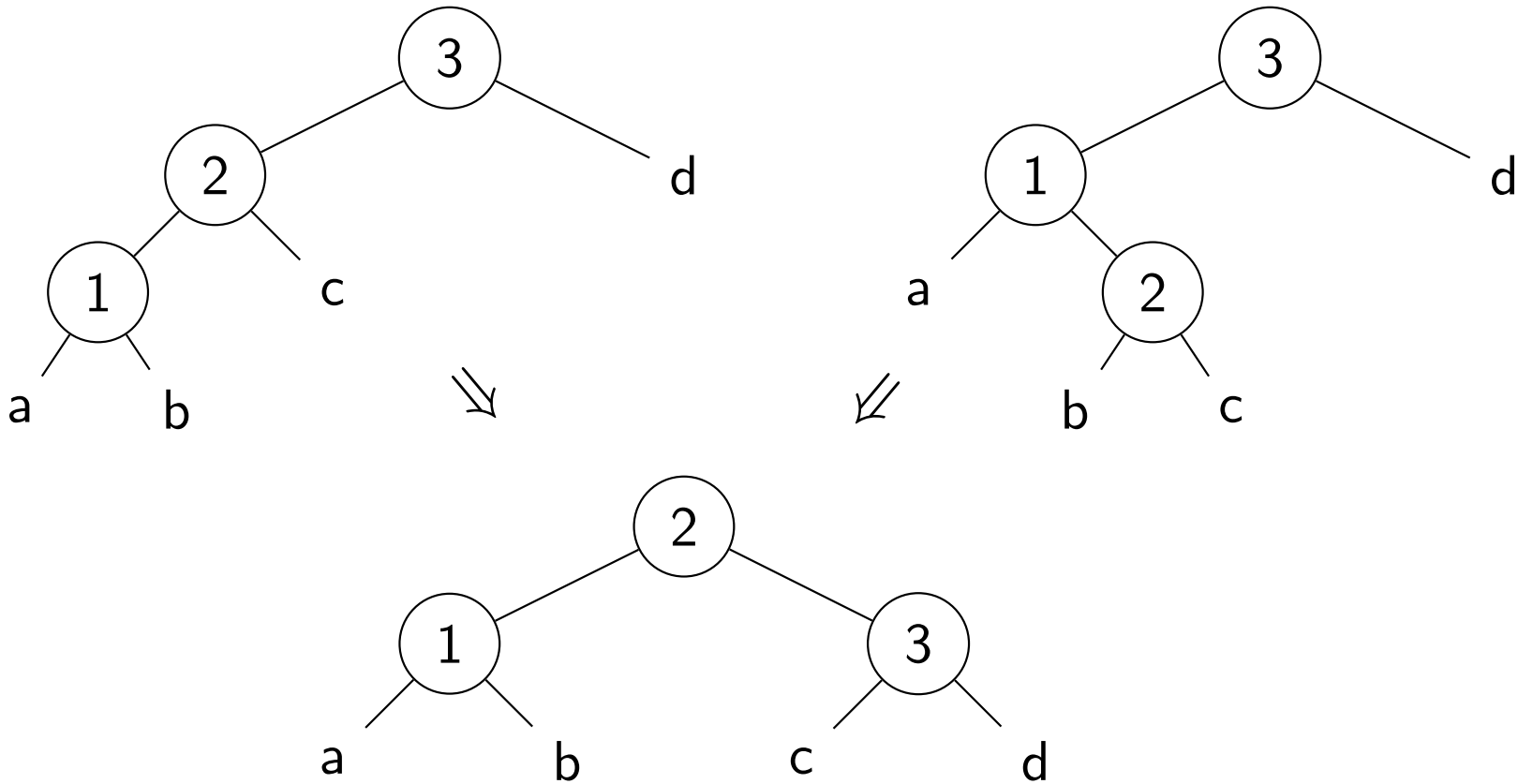
- Kom ihåg hur högt varje delträd är
- Skillnaden i höjd mellan syskon får maximalt vara 1
- *Rotera* noter vid insättning och borttagning



# AVL-rotationer



# AVL-rotationer



# Insättning

Insättning görs som i sökträd, med balansering efteråt

Testa: 10, 5, 15, 20, 7, 30, 40, 35, ...

Tidskomplexitet?

# Borttagning

Borttagning görs också som i sökträd, med balansering efteråt

Ta bort: 7, 10, 5, 15

LINKÖPING UNIVERSITY

# I kursen framöver

- Testlab
- Nästa föreläsning
  - ADT stack, kö, prioritetskö
  - Trädtraversering, heap, (fenwickträd)
- Extrauppgifter
  - 10295 (enkel)
    Användning av en lämplig datatyp.
  - 10672 (svårare)
    Övning på att traversera träd. Traversera inte onödigt många gånger!

Filip Strömbäck

www.liu.se