TDDI16 – Föreläsning 6

Grafer

Filip Strömbäck

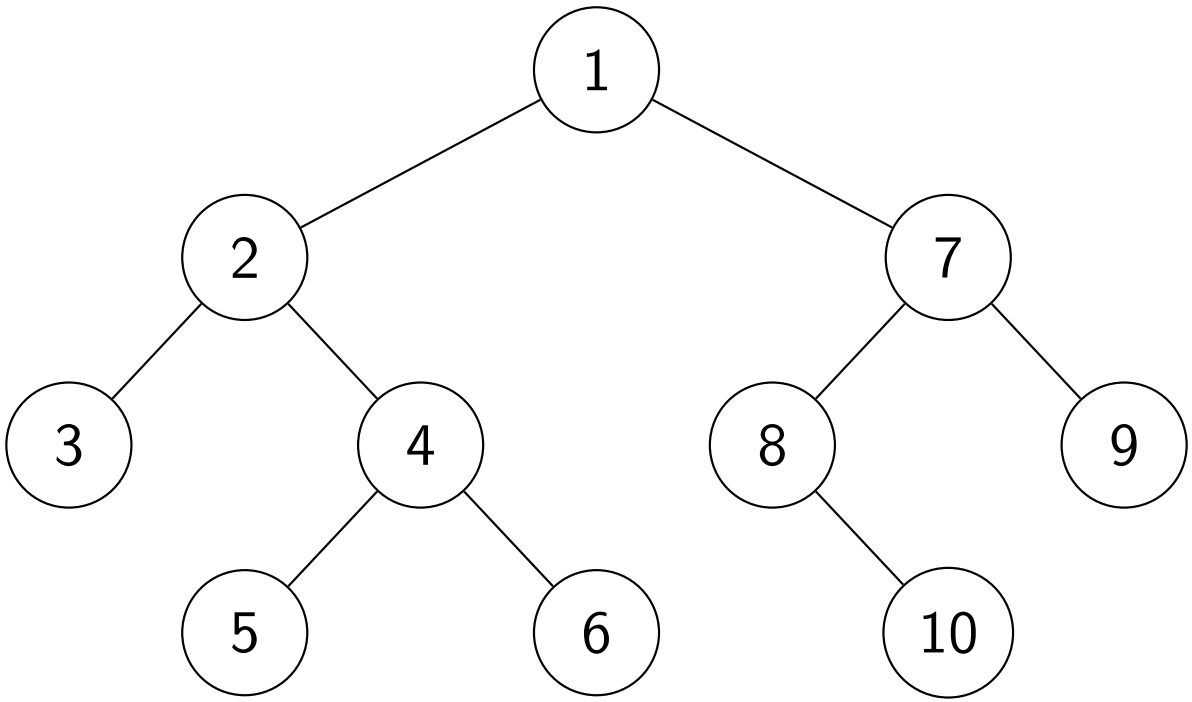
LINKÖPING UNIVERSITY

Planering

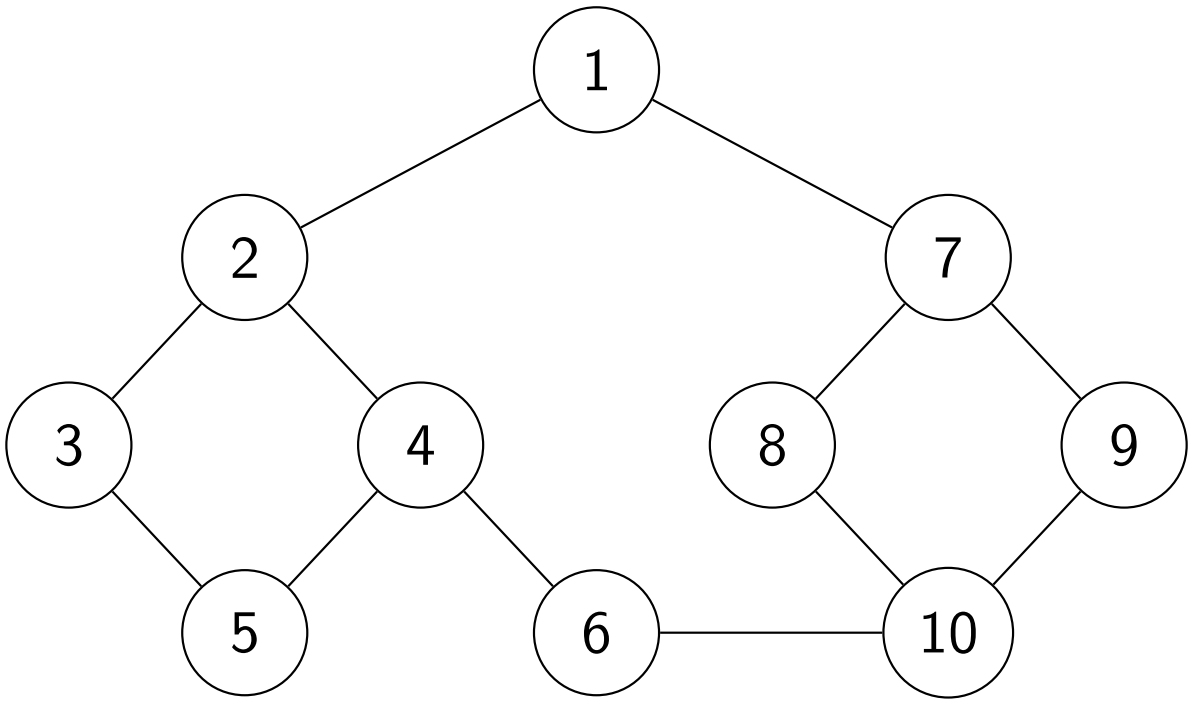
Vecka	Fö	Lab
36	Komplexitet, Linjära strukturer	----
37	Träd, AVL-träd	1---
38	Hashning	12--
39	Grafer och kortaste vägen	12--
40	Fler grafalgoritmer	-23-
41	Sortering	--3-
42	Mer sortering, beräkningsbarhet	--34
43	Tentaförberedelse	---4

LINKÖPING UNIVERSITY

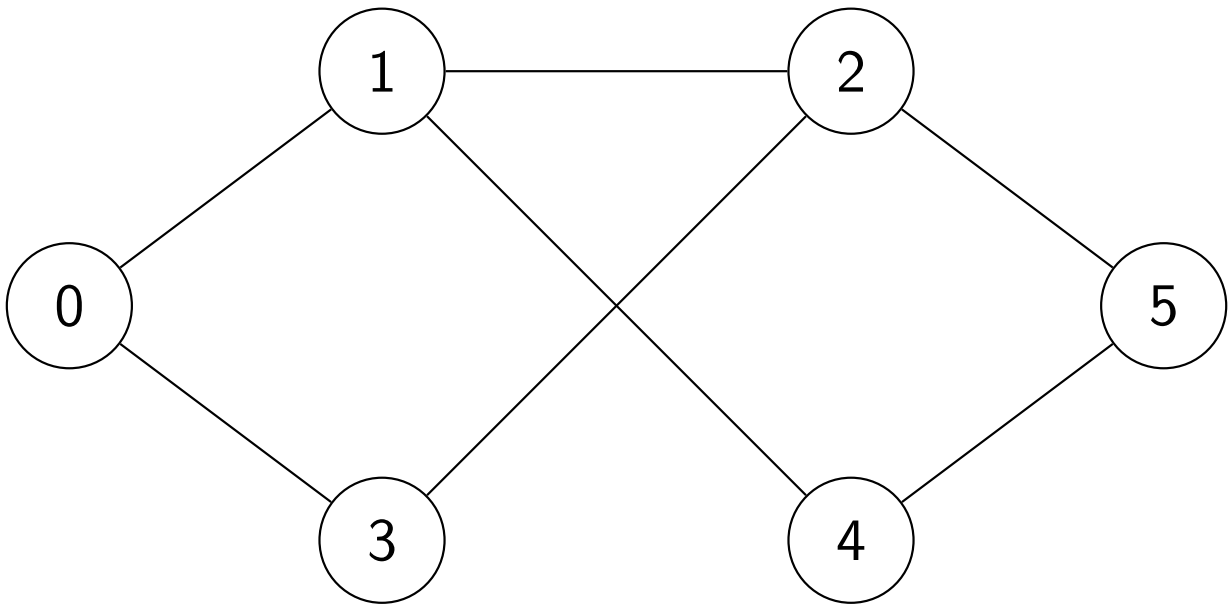
Vad är en graf?



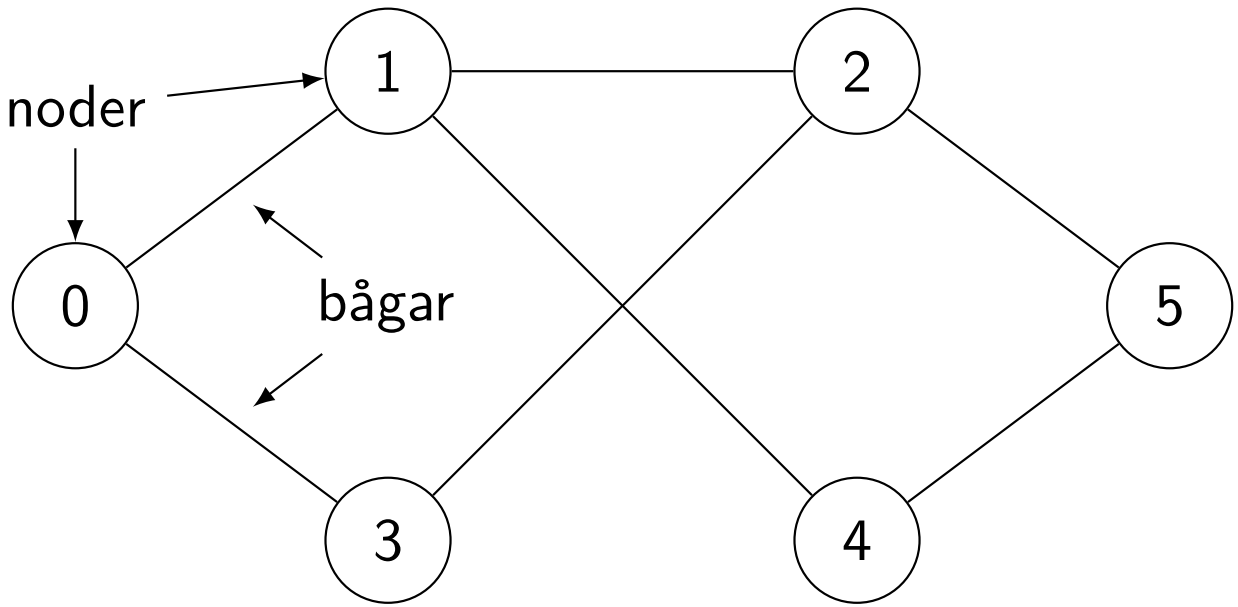
Vad är en graf?



Vad är en graf?

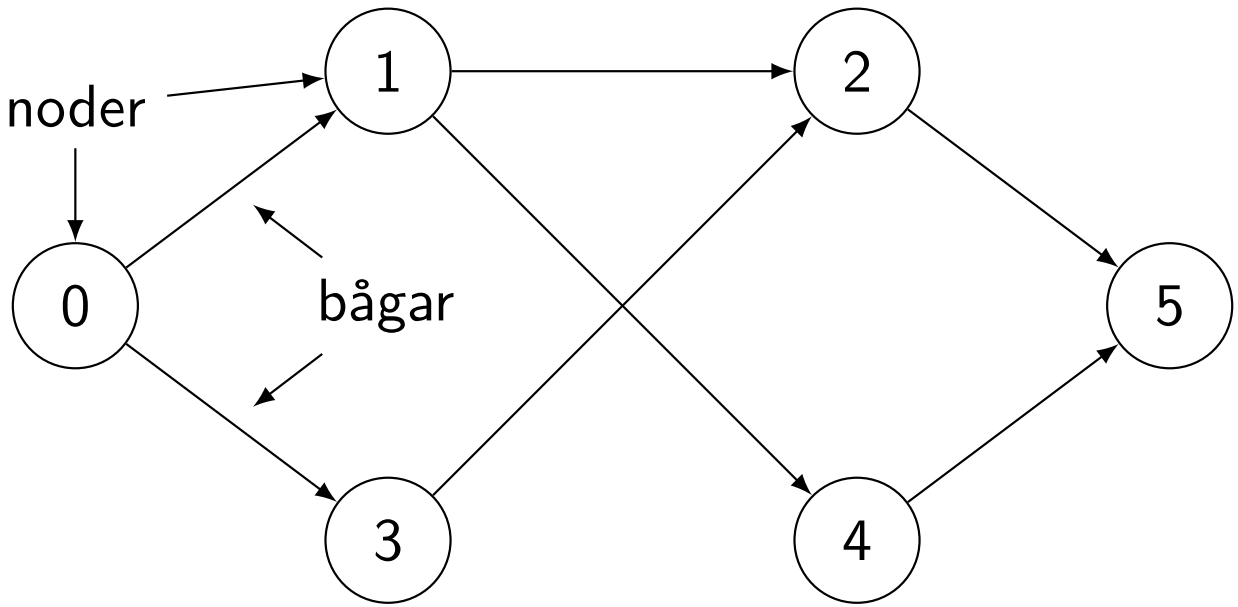


Vad är en graf?



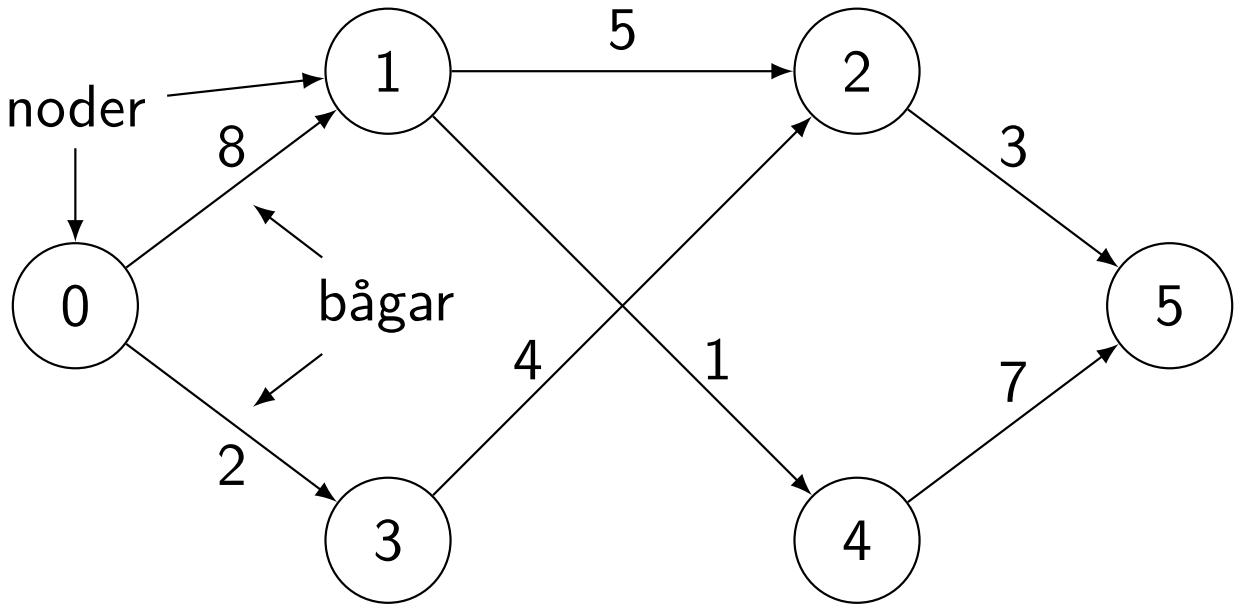
Oriktad graf

Vad är en graf?



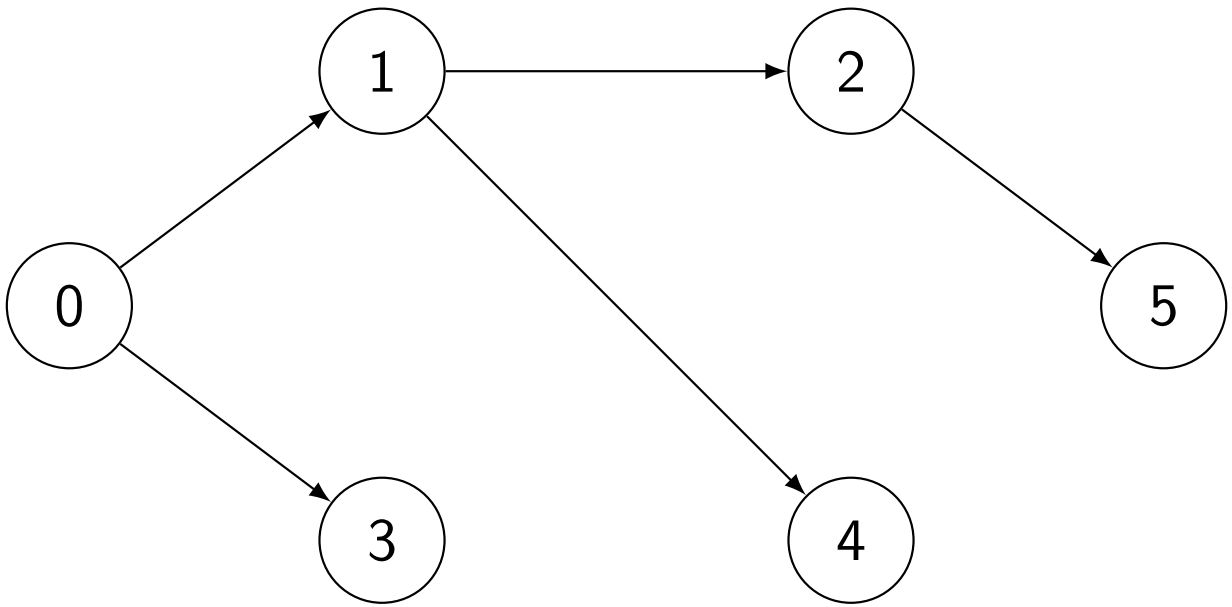
Riktad graf

Vad är en graf?

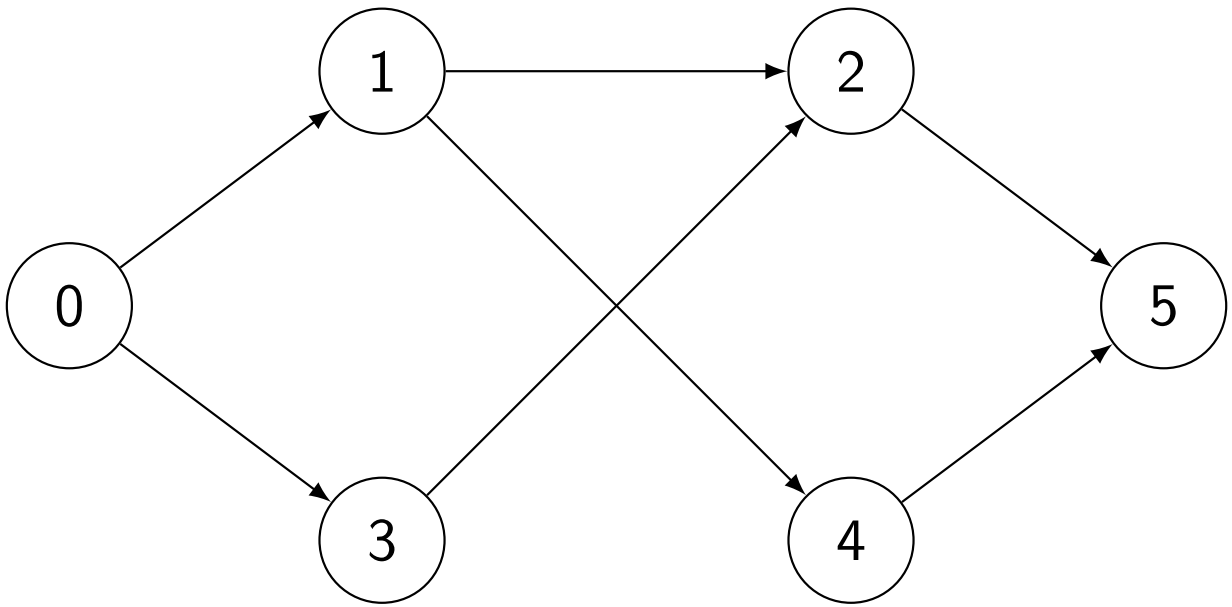


Viktade bågar

Graf eller träd?



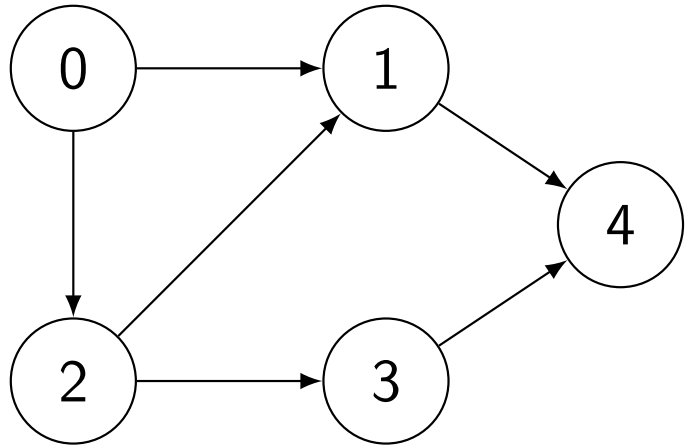
Graf eller träd?



Hur representeras en graf?

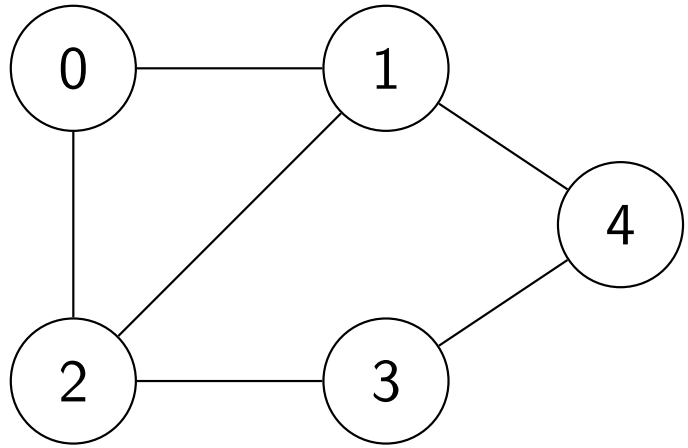
- Formell definition:
  $G = (V, E)$
  V: en mängd av alla noder (*vertices*)
  E: en mängd av par motsvarande alla bågar (*edges*)
- Länkad struktur
- Grannmatris
- Grannlistor
- Generera grafen ”on the fly”

Formell definition



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(0, 1), (0, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 4)\}$

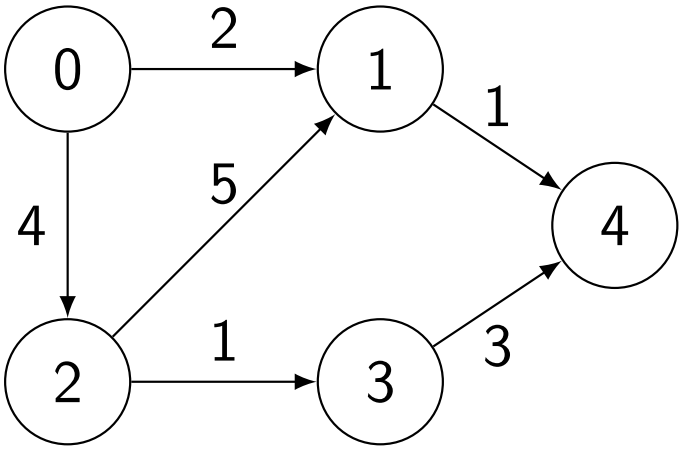
Formell definition



- $V = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 1\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$

Grannmatris (adjacency matrix)

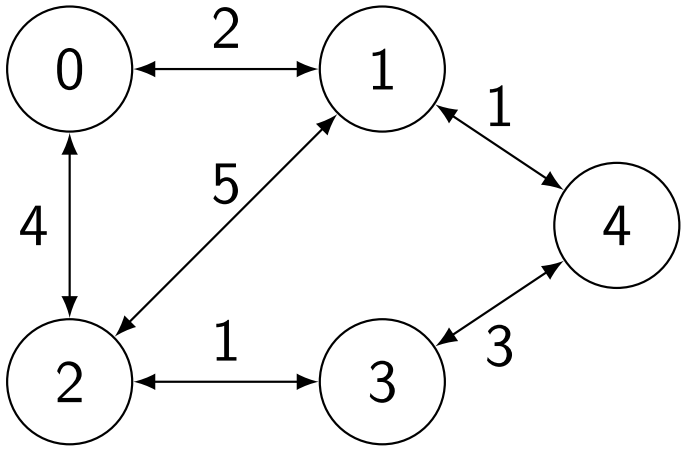
	0	1	2	3	4
0		2	4		
1					1
2		5		1	
3					3
4					



Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\|^2)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(1)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|V\|)$

Grannmatris (adjacency matrix)

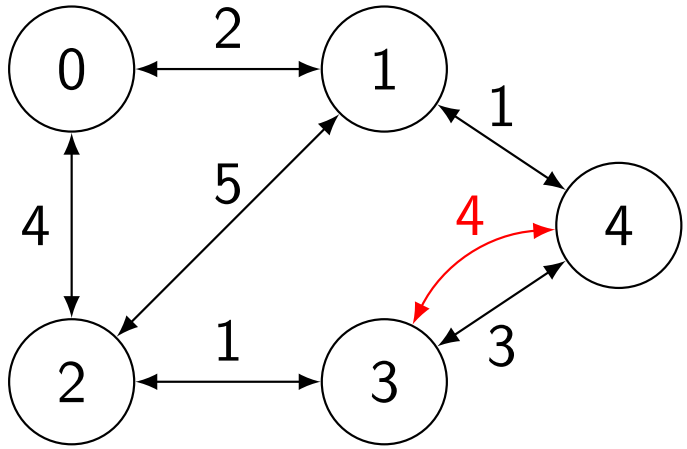
	0	1	2	3	4
0		2	4		
1	2		5		1
2	4	5		1	
3			1		3
4		1		3	



Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\|^2)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(1)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|V\|)$

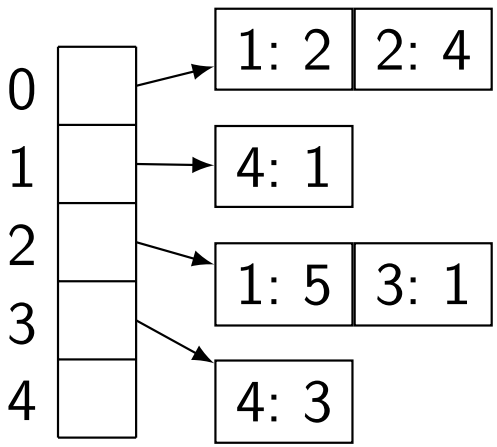
Grannmatris (adjacency matrix)

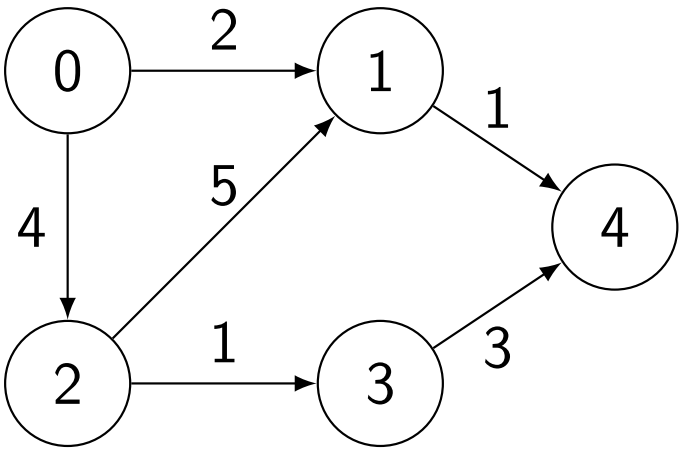
	0	1	2	3	4
0		2	4		
1	2		5		1
2	4	5		1	
3			1		3
4		1		3	



Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\|^2)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(1)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|V\|)$

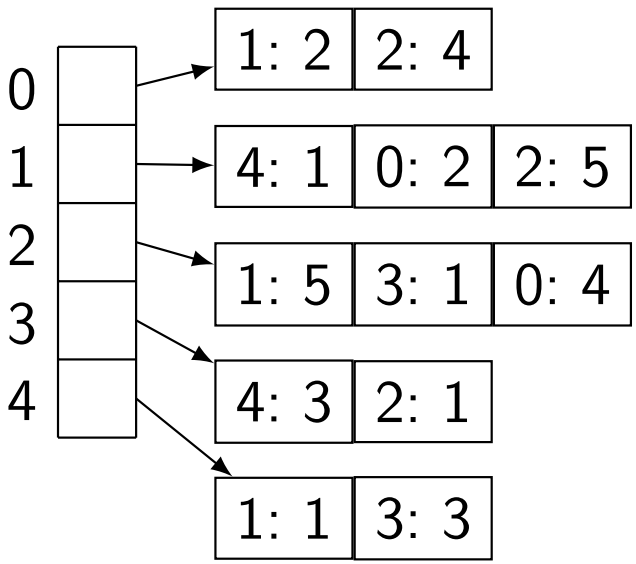
Grannlista (adjacency list)

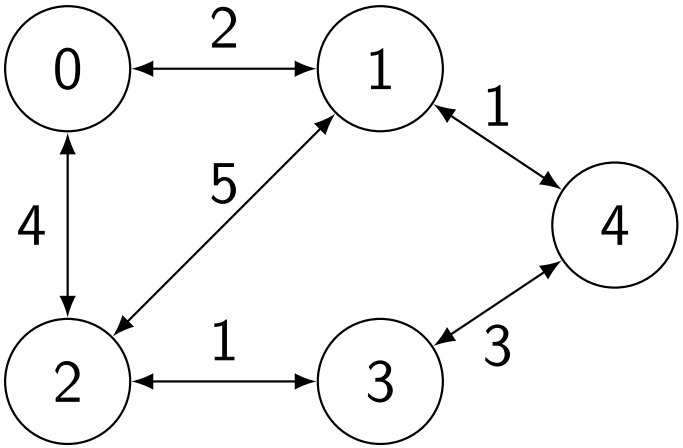




Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\| + \|E\|)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(\|E\|)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|E\|)$

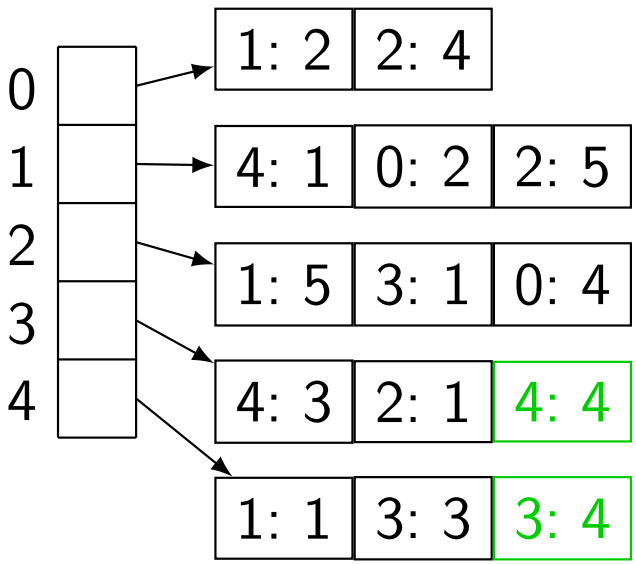
Grannlista (adjacency list)

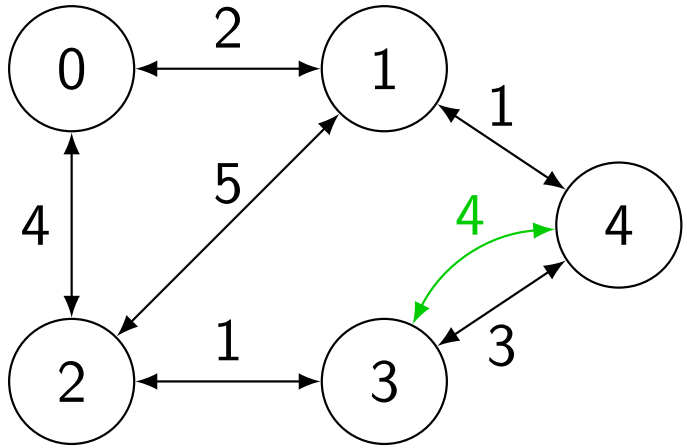




Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\| + \|E\|)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(\|E\|)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|E\|)$

Grannlista (adjacency list)

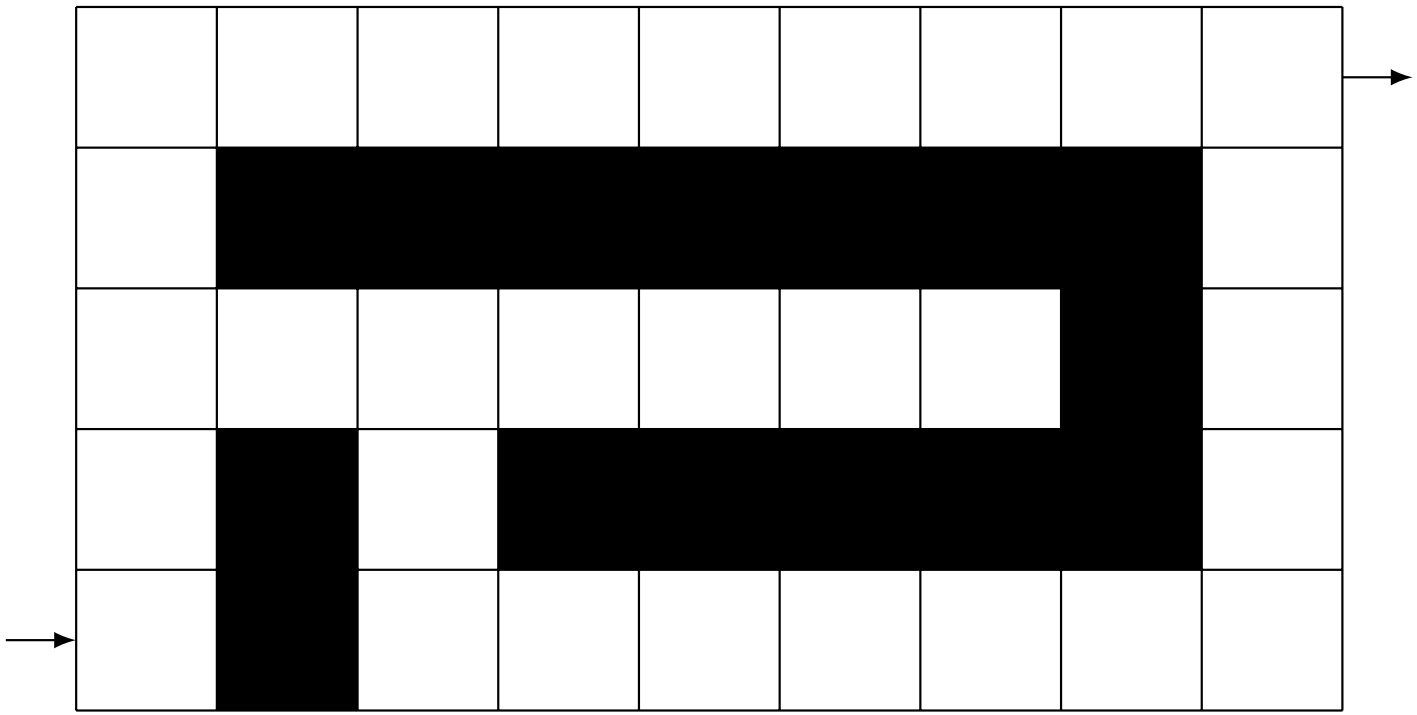




Minnesanvändning	$\mathcal{O}(\|V\| + \|E\|)$
Finns det en båge från x till y?	$\mathcal{O}(\|E\|)$
Vilka bågar finns från x?	$\mathcal{O}(\|E\|)$

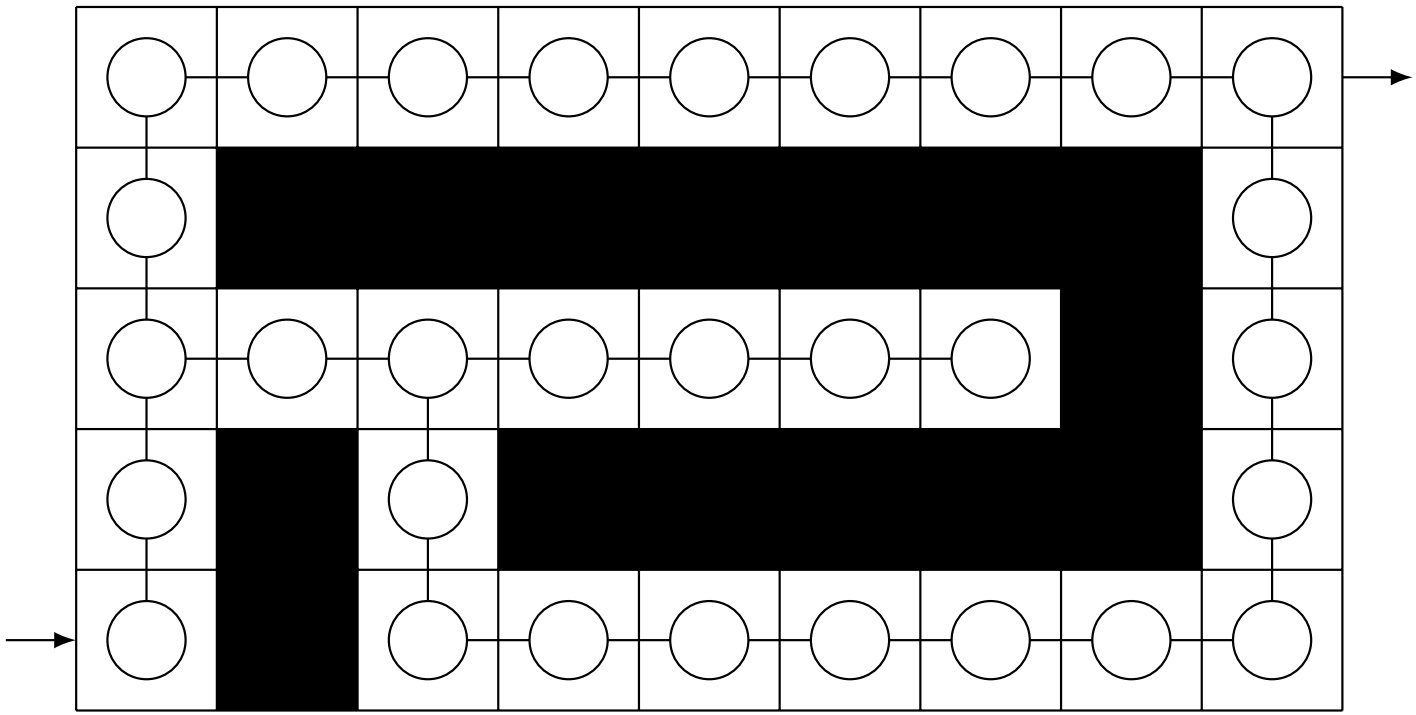
Problem

Hitta en väg genom labyrinten:



Problem

Hitta en väg genom labyrinten:



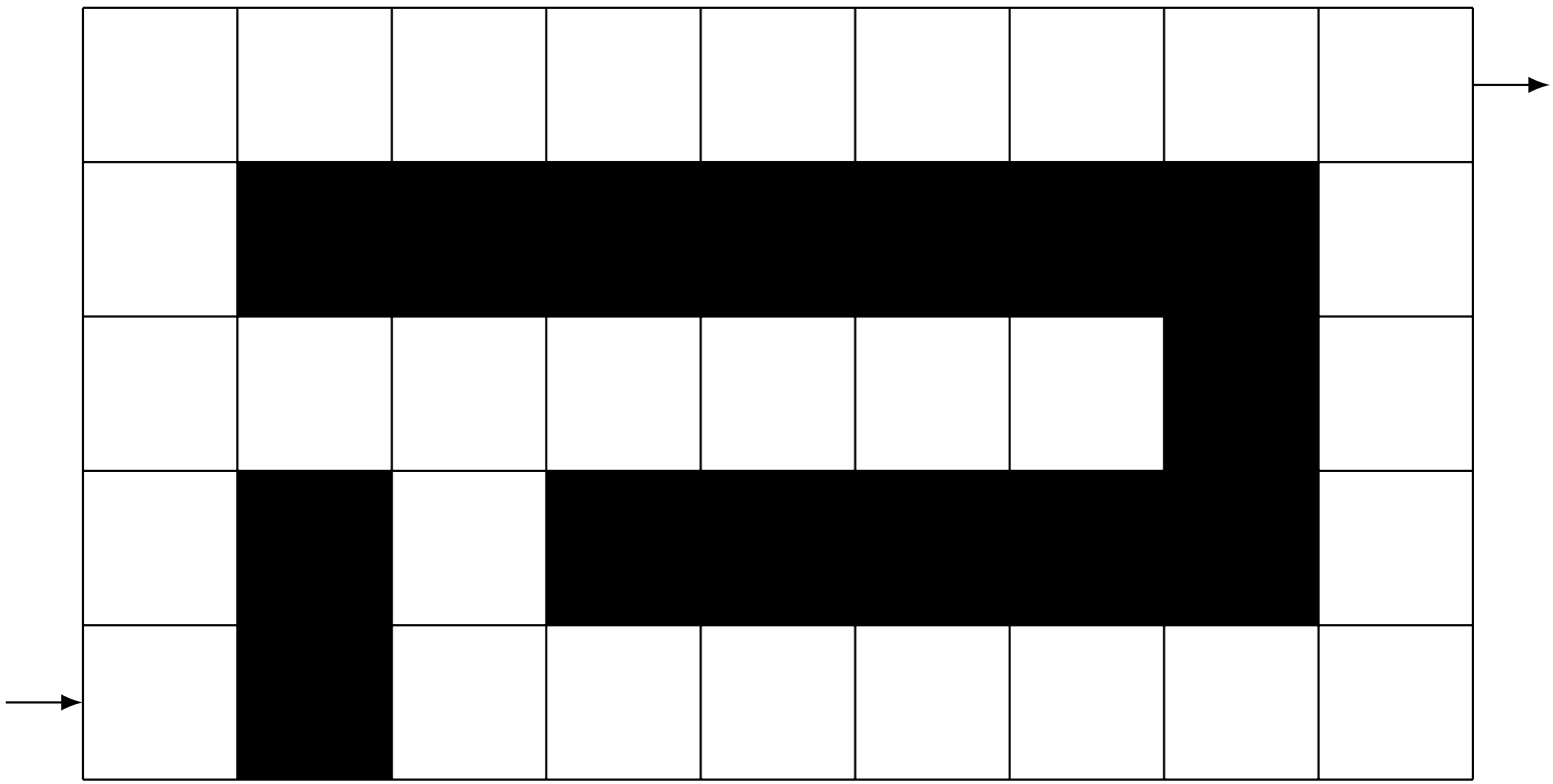
Grafdefinition

```
struct Node {
  vector<int> edges;
  bool visited = false;
  int previous;
};

vector<Node> graph;
```

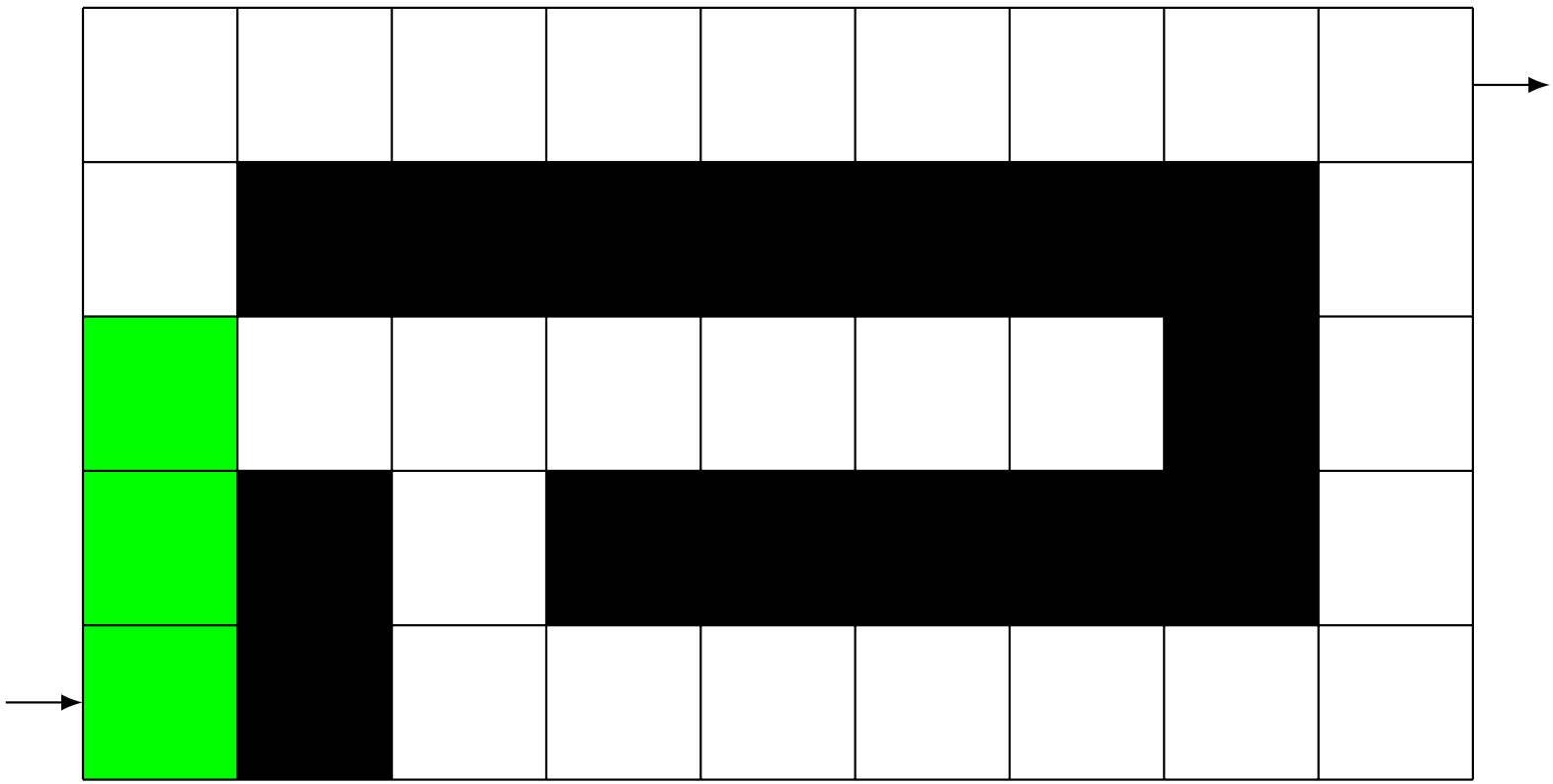
Djupet först (DFS)

```
bool dfs(int from, int to) {
  if (from == to)
    return true;

  for (int x : graph[from].edges) {
    if (!graph[x].visited) {
      graph[x].visited = true;
      if (dfs(x, to))
        return true;
    }
  }
  return false;
}
```

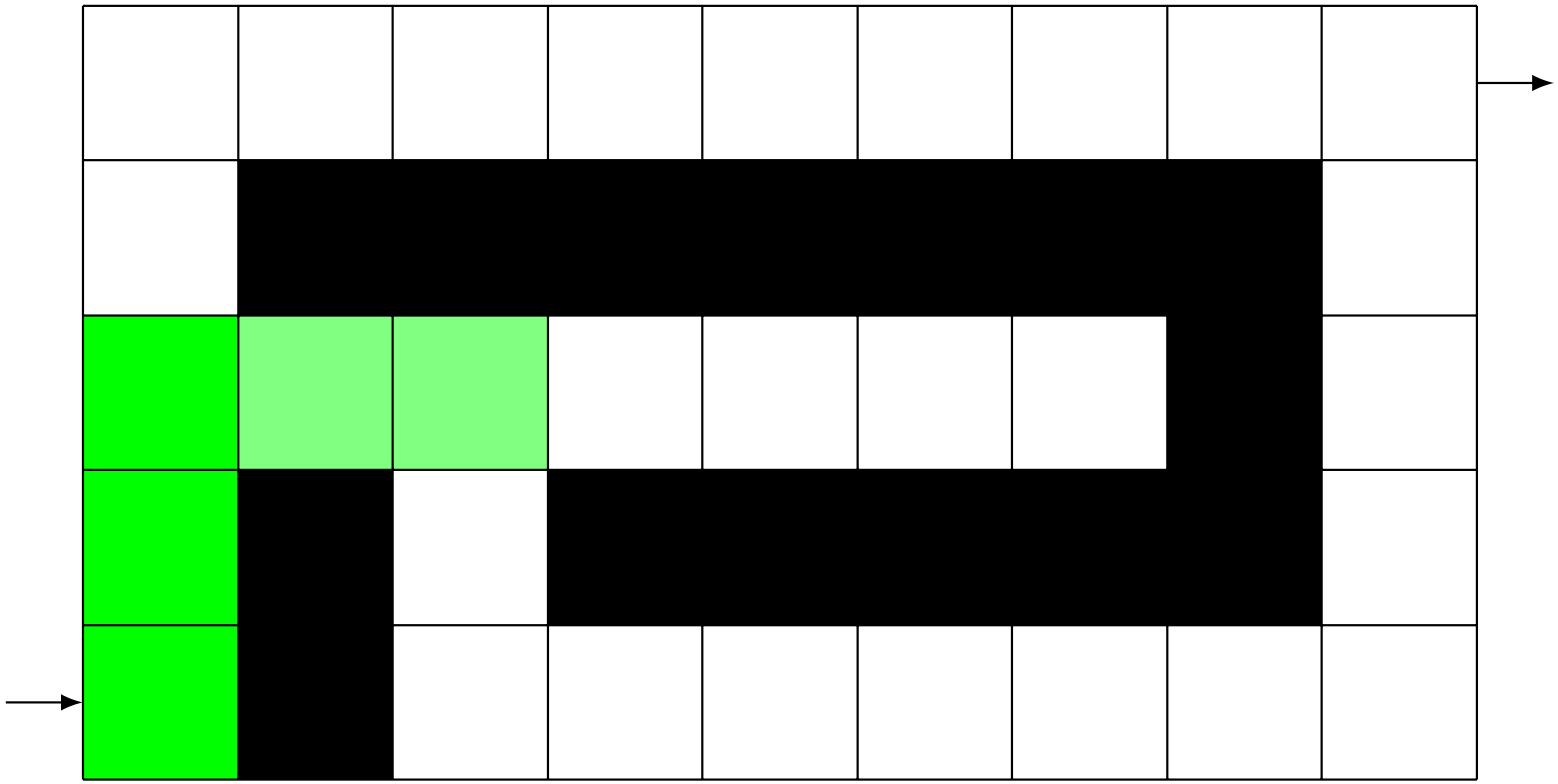
Djupet först (DFS)



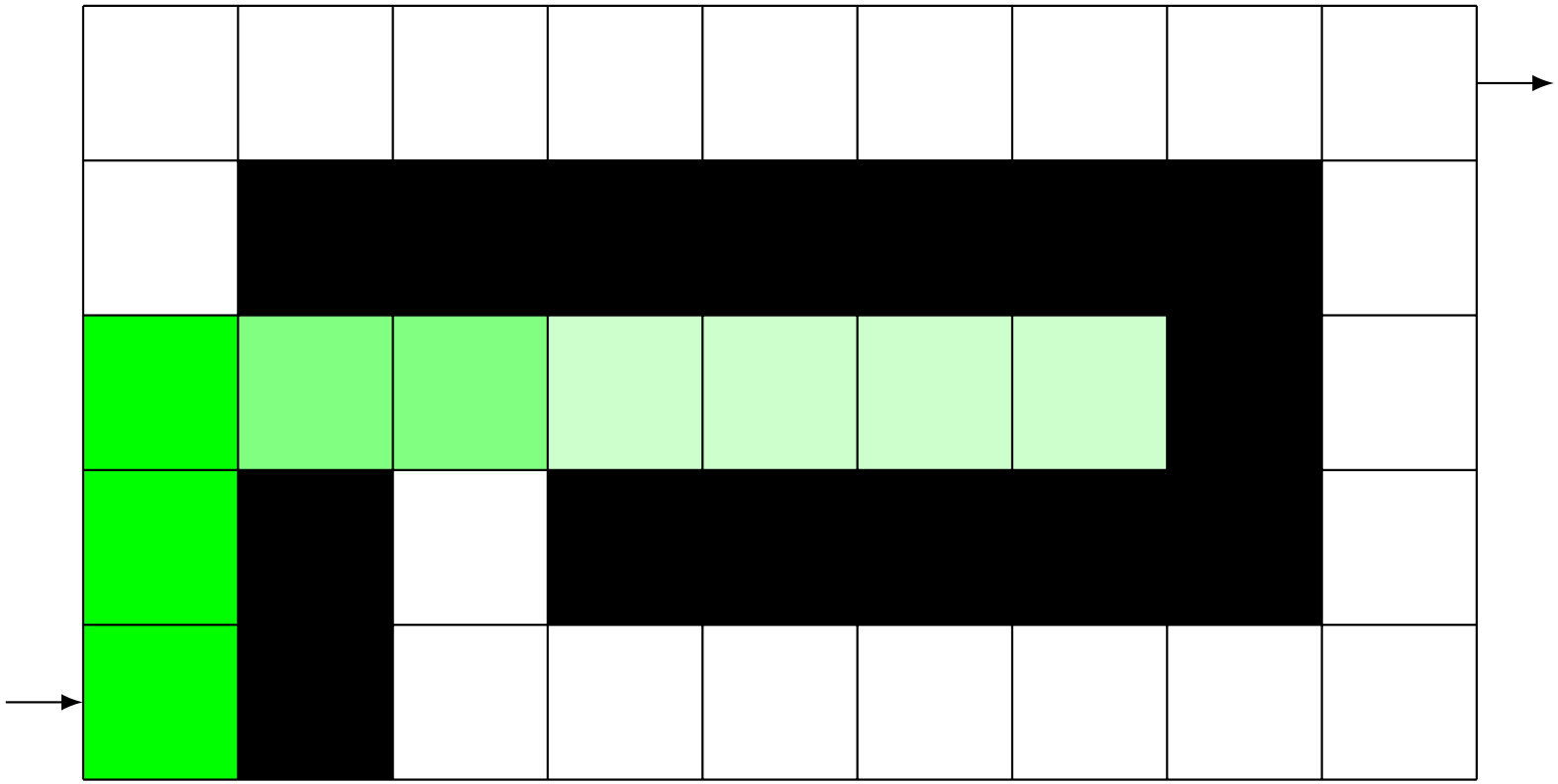
Djupet först (DFS)



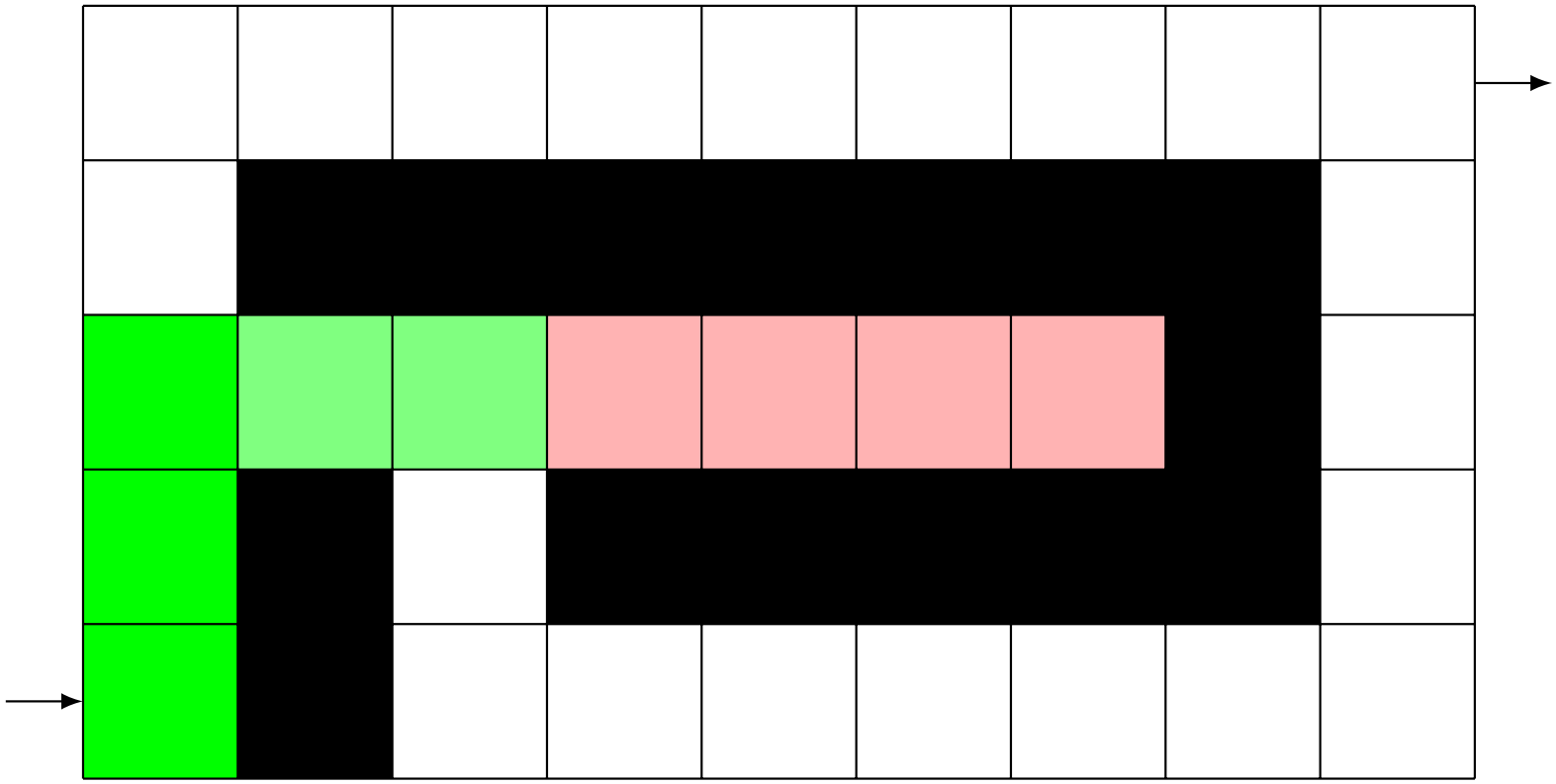
Djupet först (DFS)



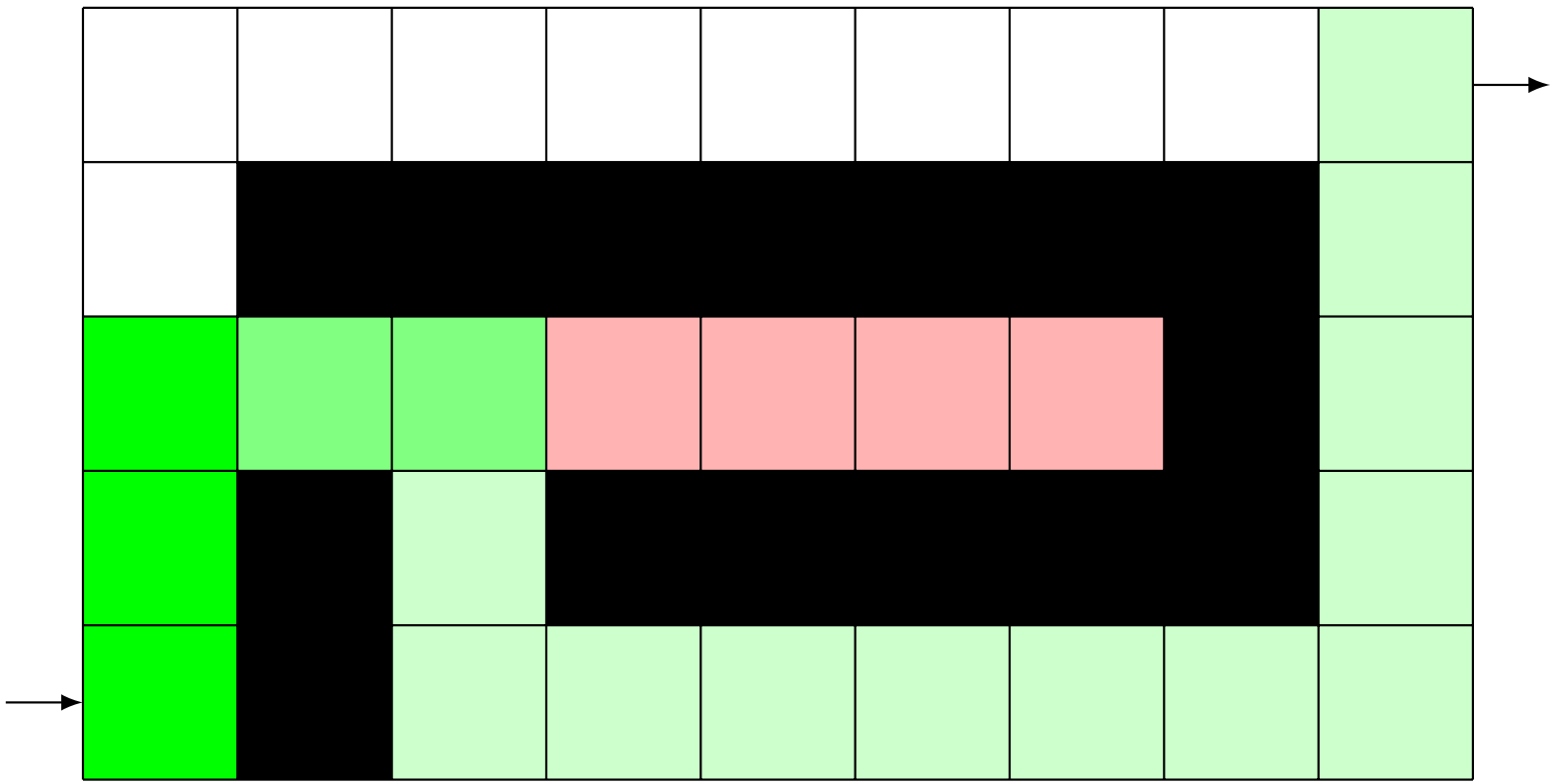
Djupet först (DFS)



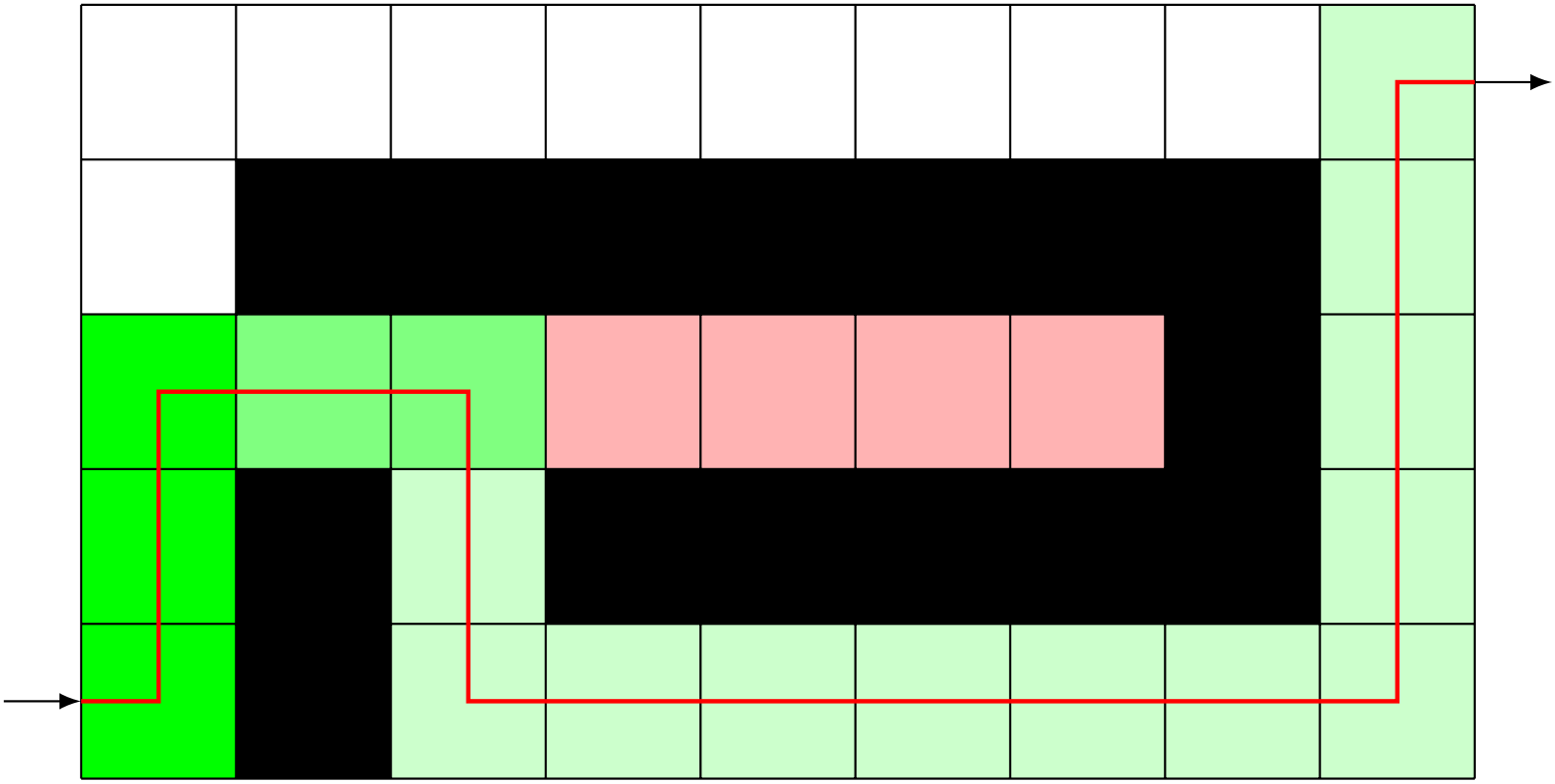
Djupet först (DFS)



Djupet först (DFS)



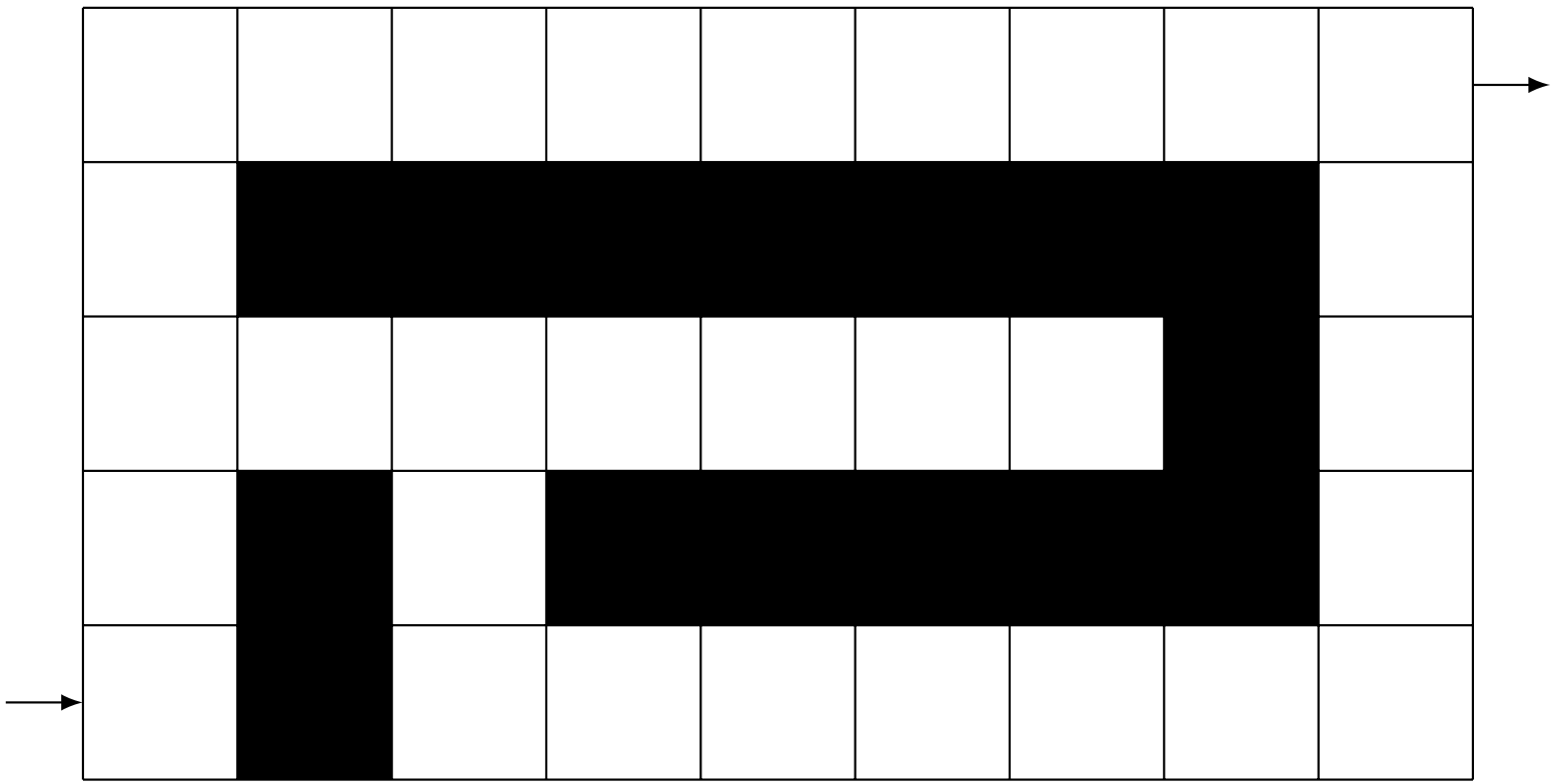
Djupet först (DFS)



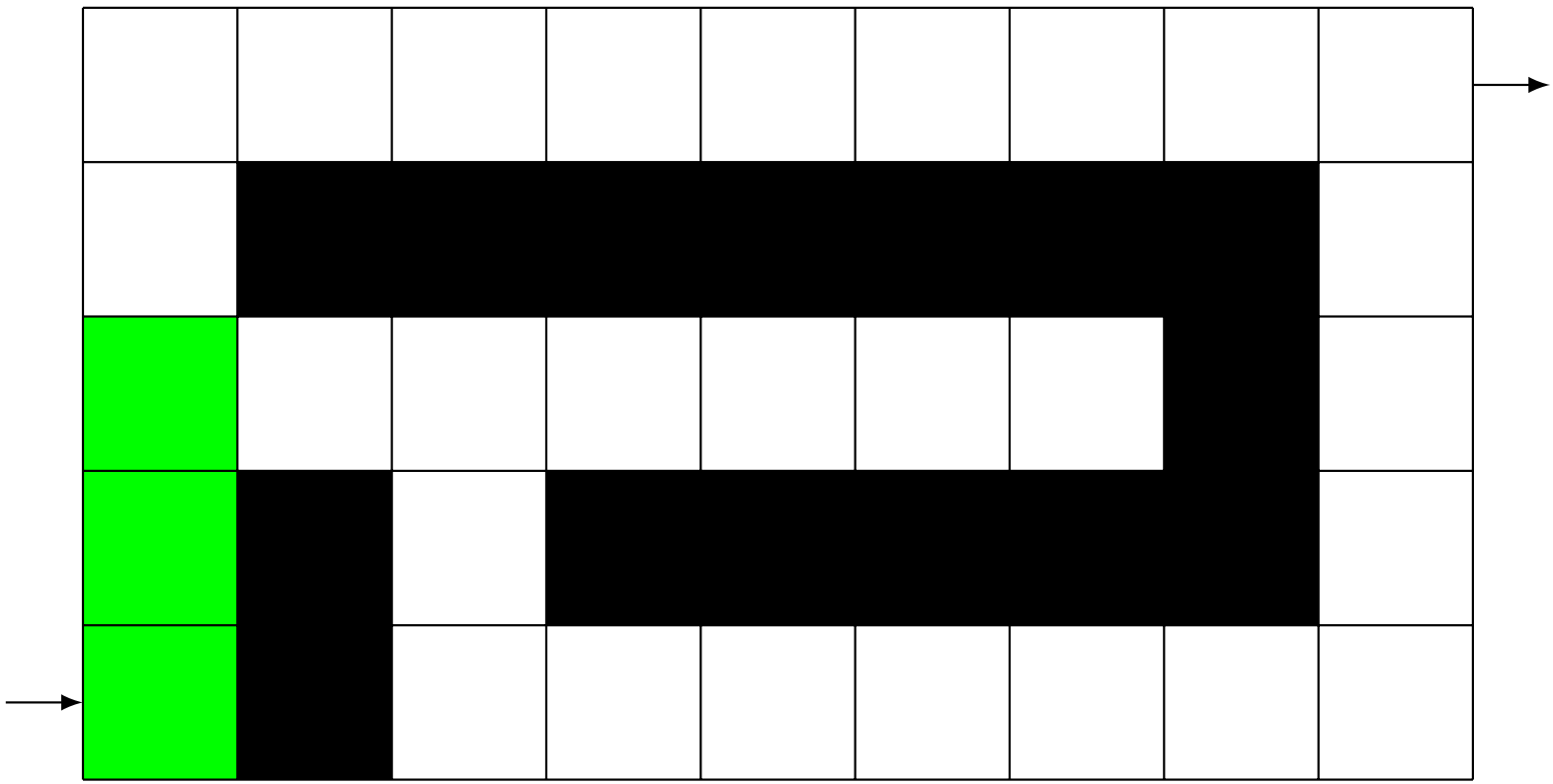
Bredden först (BFS)

```
bool bfs(int from, int to) {
  queue<int> q; q.push(from);
  graph[from].visited = true;
  while (!q.empty()) {
    int current = q.top(); q.pop();
    for (int x : graph[current].edges) {
      if (x == to) return true;
      // om x inte redan är besökt, markera
      // den som besökt och lägg på kö
    }
  }
  return false;
}
```

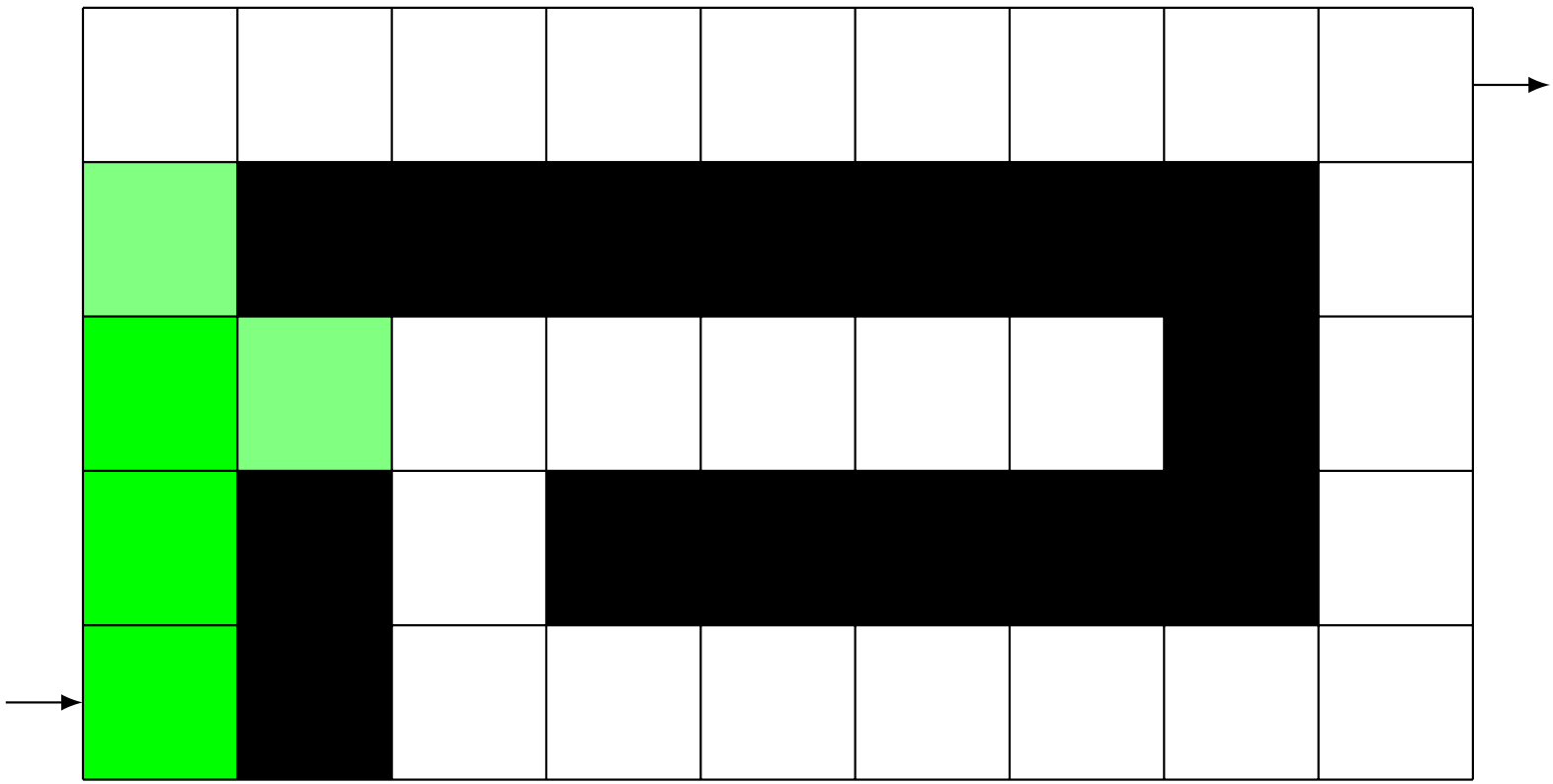
Bredden först (BFS)



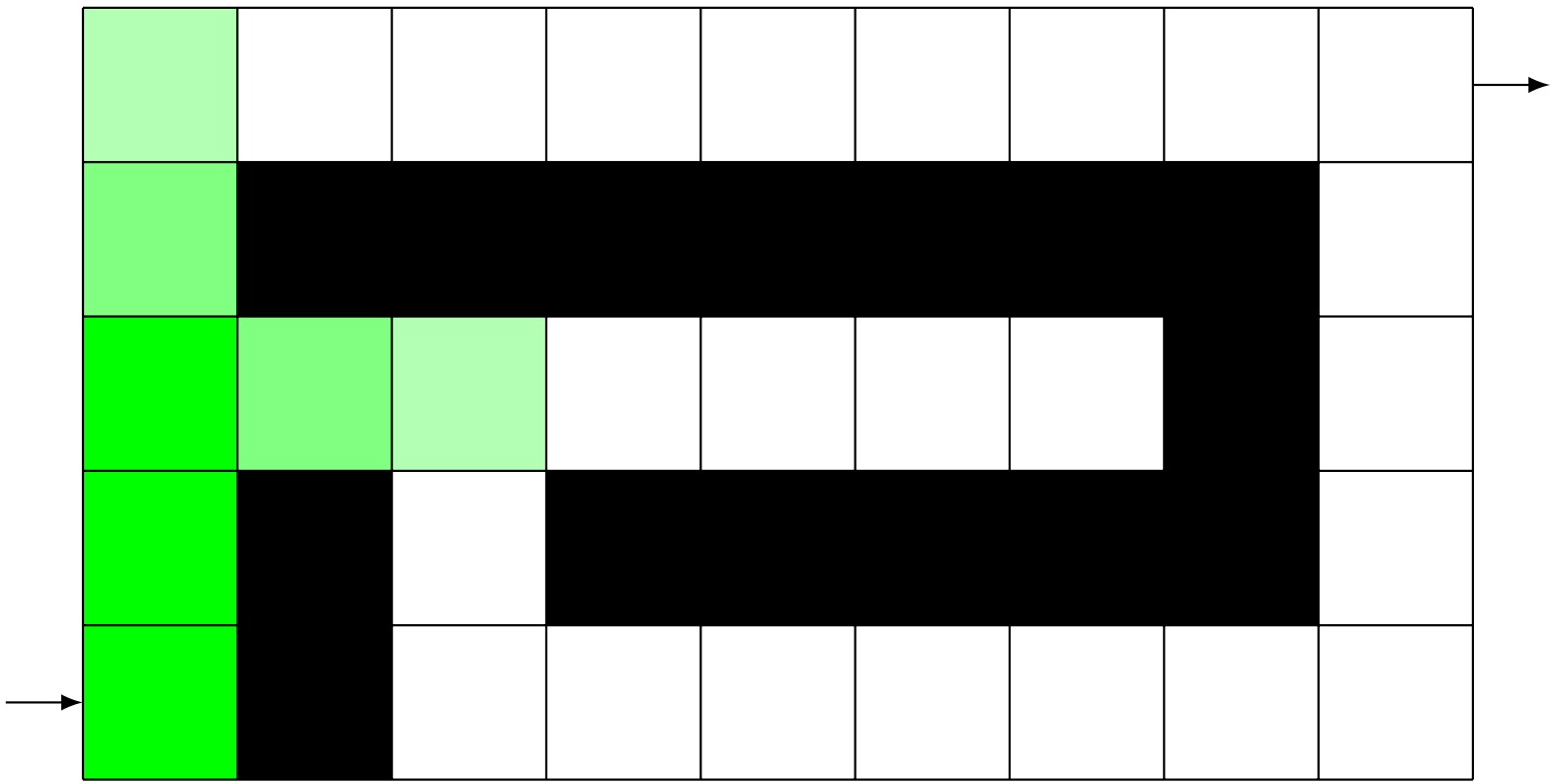
Bredden först (BFS)



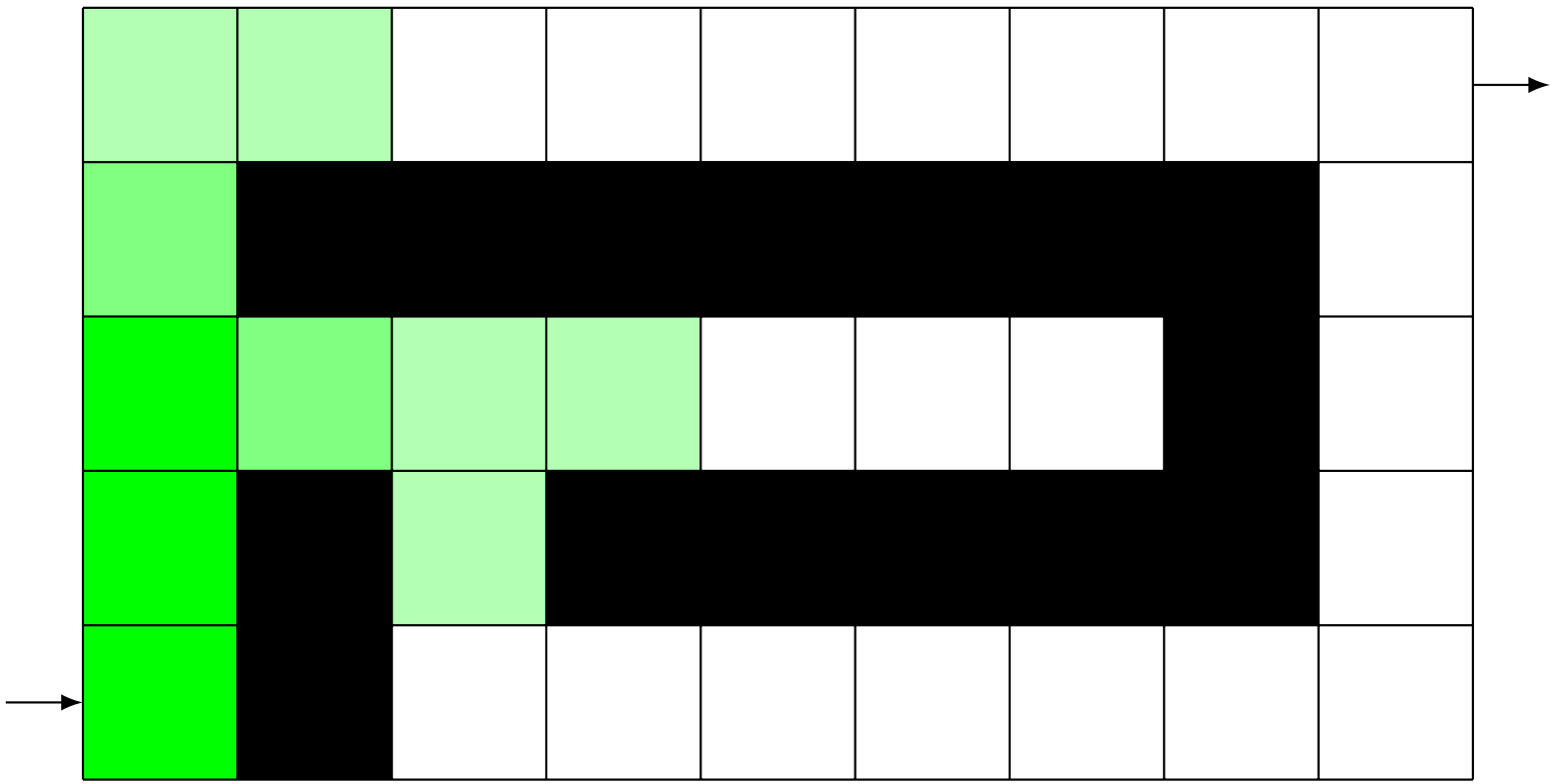
Bredden först (BFS)



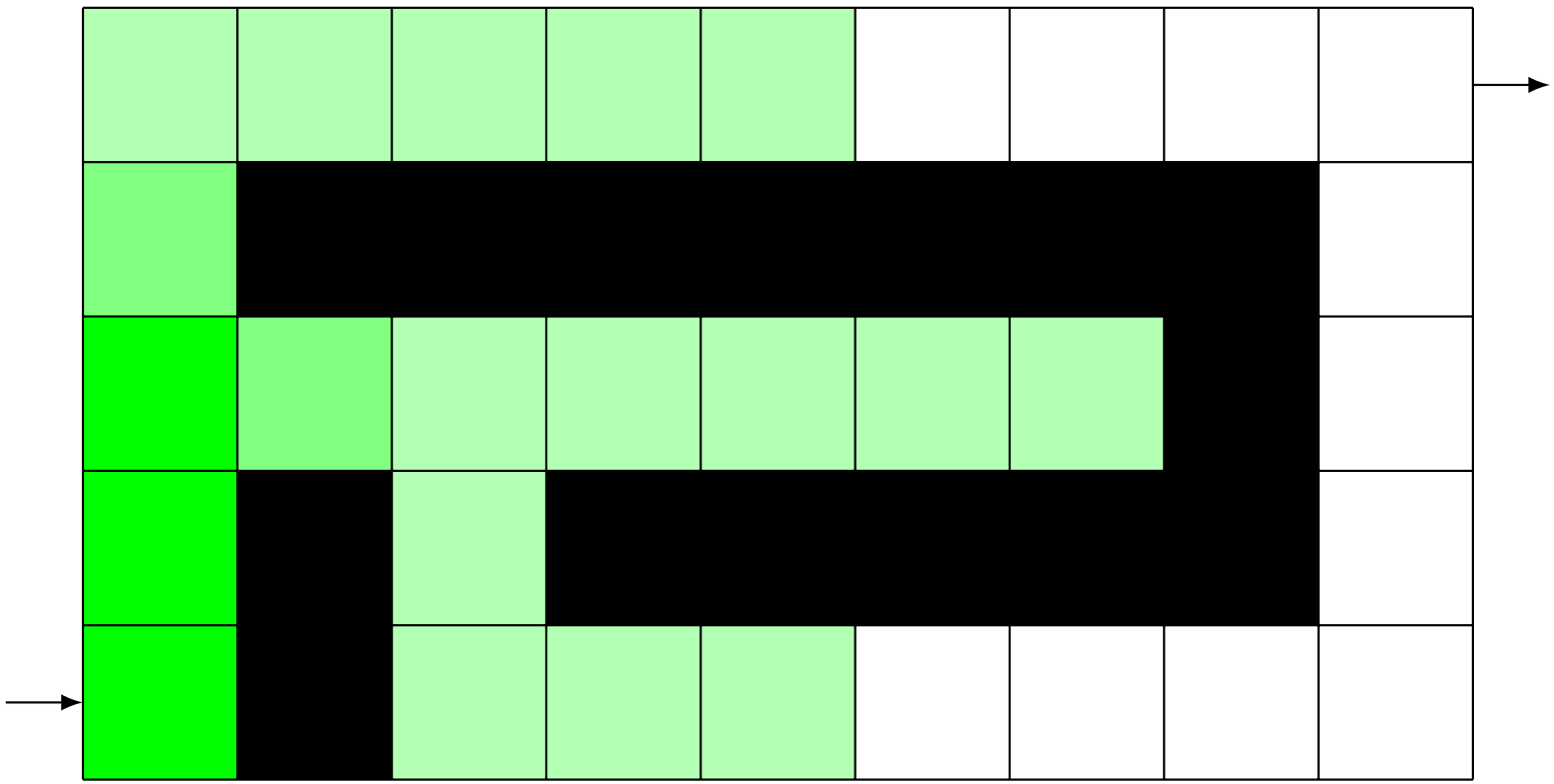
Bredden först (BFS)



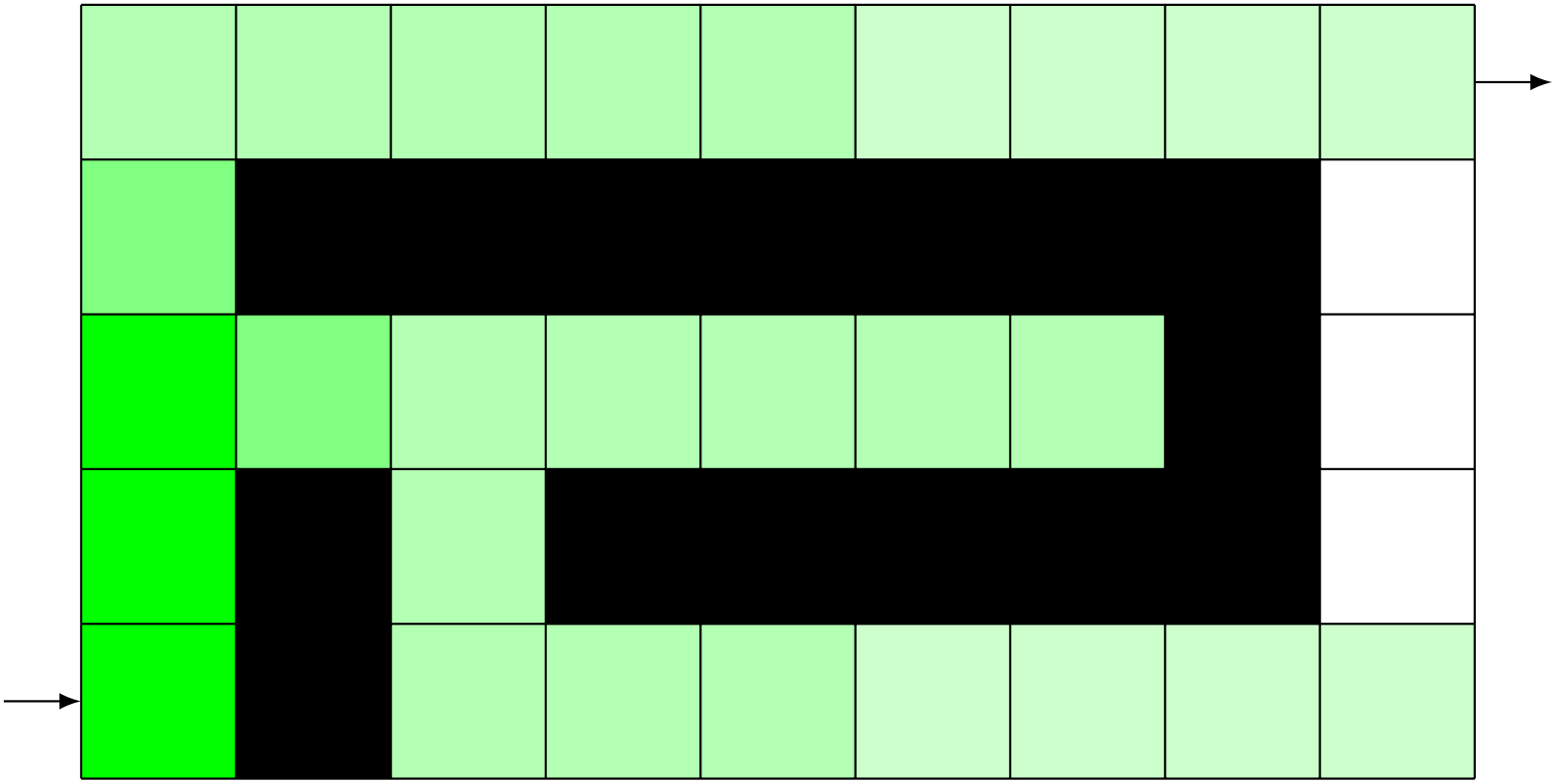
Bredden först (BFS)



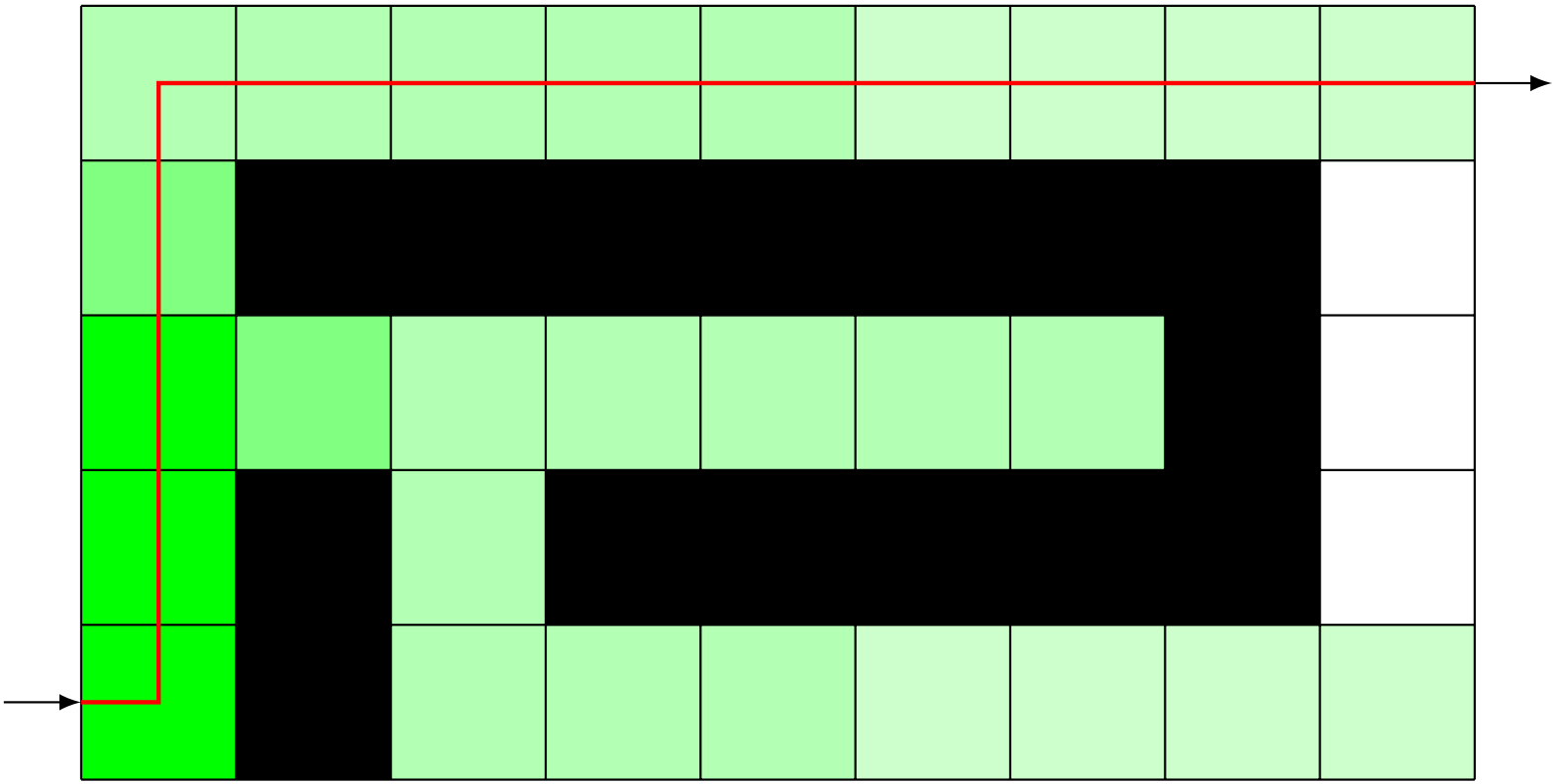
Bredden först (BFS)



Bredden först (BFS)



Bredden först (BFS)



Implicit graf

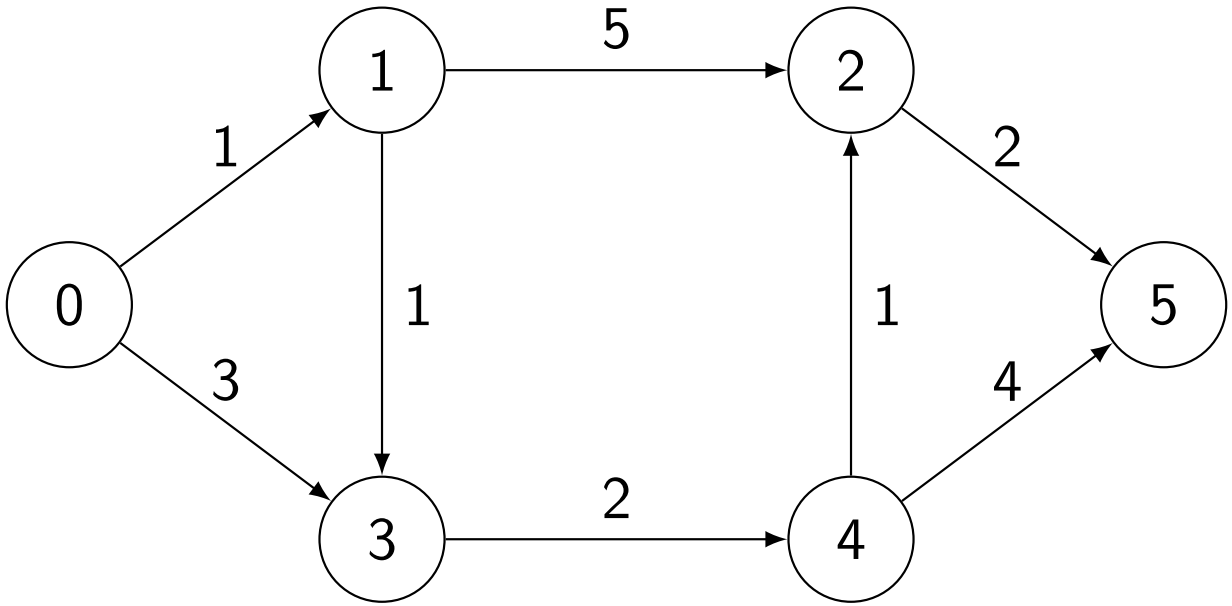
```
class Point {
public:
  int x, y;
  // ...
};

bool map[width][height];
```

Implicit BFS

```
bool bfs(Point from, Point to) {
  queue<Point> q; q.push(from);
  bool visited[width][height] = false;
  visited[from.x][from.y] = true;
  while (!q.empty()) {
    Point current = q.top(); q.pop();
    for (Point x : current.neighbors()) {
      if (c == current) return true;
      // Om 'x' ej besökt, markera och lägg på kö.
    }
  }
  return false;
}
```

LINKÖPING UNIVERSITY

BFS i en viktad graf



Vilken väg väljs?

Inte så bra...

- Eftersom vi använder en kö antar BFS att alla bågar har samma vikt...
- Alltså ger den lösningen som traverserar minst antal noder

Idé:

- Vad händer om vi i stället hela tiden väljer den nod i kön som representerar kortast sträcka?
- Dijkstras algoritm

Dijkstra

```
bool dijkstra(int from, int to) {
  priority_queue<...> q; q.push(from);
  while (!q.empty()) {
    int current = q.top(); q.pop();
    if (graph[current].visited) continue;
    graph[current].visited = true;
    if (current == to) return true;
    for (int x : graph[current].edges) {
      // Uppdatera x och lägg på kön om bättre
    }
  }
  return false;
}
```

Dijkstra – tidskomplexitet

- $\mathcal{O}((|E| + |V|) \log(|V|))$
- Observation:
  För sammanhängande grafer gäller: $|V| \leq |E| \leq |V|^2$
- Alltså: $\mathcal{O}(|V|^2 \log(|V|))$, $\mathcal{O}(|E| \log(|V|))$ är också OK

- Notera: $\mathcal{O}(|E| + |V| \log |V|)$ är om bättre heap (fibonacciheap) används

Dijkstra – egenskaper

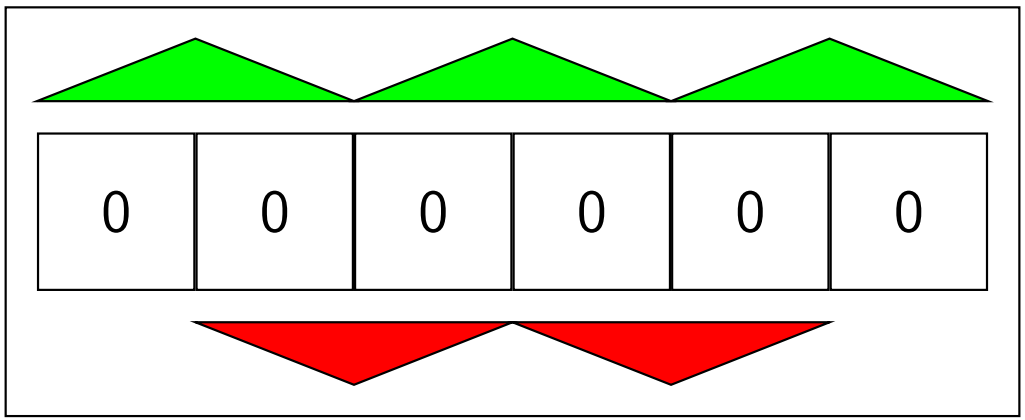
Hittar kortaste vägen i en *viktad graf*

- Tid: $\mathcal{O}((|E| + |V|) \log(|V|))$ (med heap)
- BFS är ofta bättre på oviktade grafer: $\mathcal{O}(|E| + |V|)$
- Kan optimeras med hjälp av heurustik: A^*
- Förutsätter att det inte finns några **negativa cykler** *Bellman-Ford* klarar negativa cykler, men tar $\mathcal{O}(|E||V|)$
- Att hitta kortaste vägen mellan alla par av noder görs snabbare med *Floyd-Warshall*, som tar $\mathcal{O}(|V|^3)$ jämfört med $\mathcal{O}(|V|^3 \log(|V|))$

LINKÖPING UNIVERSITY

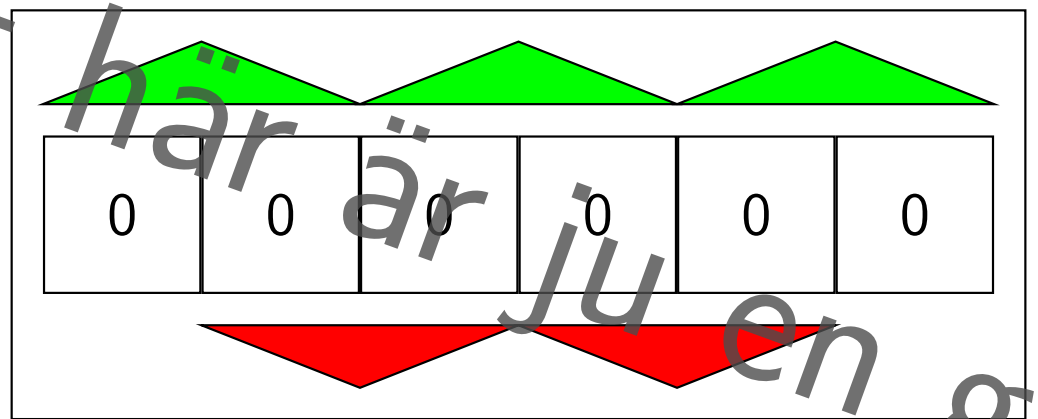
Problem

Du har hittat ett gammalt kodlås som du vill låsa upp. Du vet att koden är 568919, och just nu visar siffrorna på låset 000000. Låset har knappar för att öka och minska de olika siffrorna, dock fungerar de inte riktigt som de ska. Hur skriver du in koden med så få knapptryck som möjligt? Vilka koder går att skriva?



Problem

Du har hittat ett gammalt kodlås som du vill låsa upp. Du vet att koden är 568919, och just nu visar siffrorna på låset 000000. Låset har knappar för att öka och minska de olika siffrorna, dock fungerar de inte riktigt som de ska. Hur skriver du in koden med så få knapptryck som möjligt? Vilka koder går att skriva?



Det här är ju en graf!

Lösningsidé

Representera problemet som en riktad graf:

- En nod för varje kombination
- Varje båge motsvarar ett knapptryck

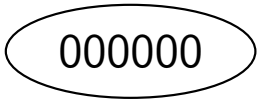
Lösningsidé

Representera problemet som en riktad graf:

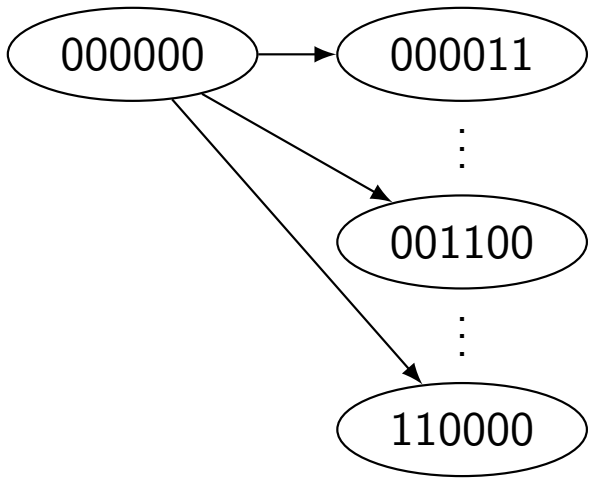
- En nod för varje kombination
- Varje båge motsvarar ett knapptryck

- Oviktad graf $\Rightarrow$ BFS
- Varje väg motsvarar en lösning!

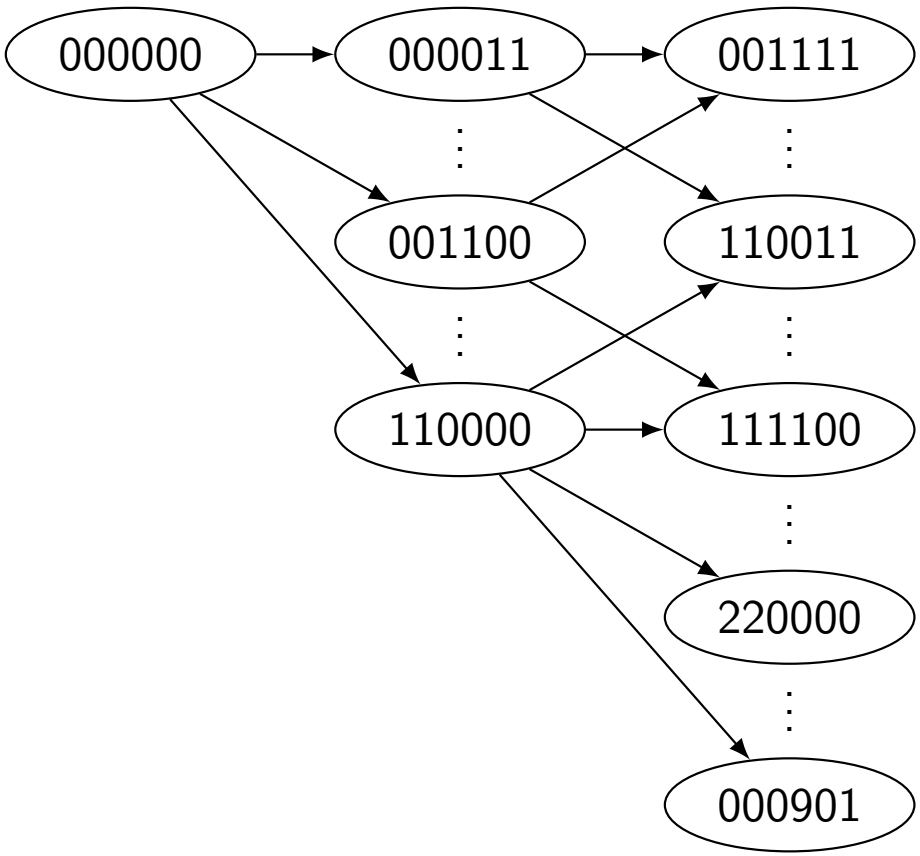
Lösningsidé



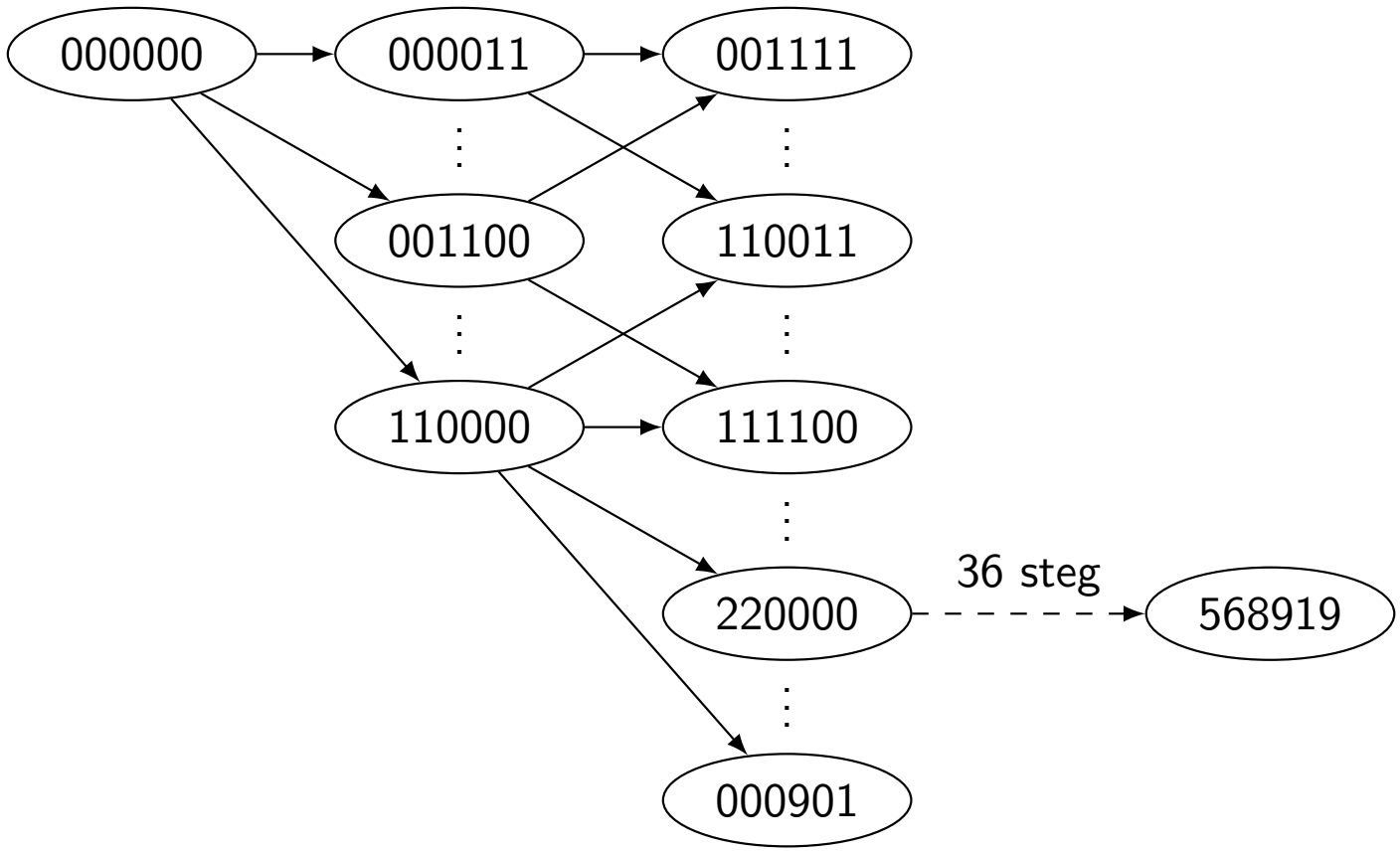
Lösningsidé



Lösningsidé



Lösningsidé



LINKÖPING UNIVERSITY

I kursen framöver

- Börja med lab 3 under nästa vecka
- Nästa föreläsning
  - Fler grafalgoritmer, uppspännande träd etc.
- Extrauppgifter
  - 280 (enkel)
    Hitta icke-nåbara noder i en graf.
  - 11367 (svårare)
    Optimera bränslepriser under en bilfärd. Tips: representera varje stad som en samling noder: en för varje möjlig bränslenivå!

Filip Strömbäck

www.liu.se