TDDI16 – Föreläsning 5

Hashning och hashtabeller

Filip Strömbäck

LINKÖPING UNIVERSITY

Planering

Vecka	Fö	Lab
36	Komplexitet, Linjära strukturer	----
37	Träd, AVL-träd	1---
38	Hashning, meet-in-the-middle	12--
39	Grafer, graftraversering och kortaste vägen	-2--
40	-	--3-
41	Sortering	--34
42	Repetition	---4

LINKÖPING UNIVERSITY

Från föreläsning 3

	`vector`	`set`, `map`	Önsketänkande
Insättning	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log(n))$	$\mathcal{O}(1)$
Uppslagning	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log(n))$	$\mathcal{O}(1)$
Stavningskontroll	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$

Kan vi implementera vårt önskade fall?

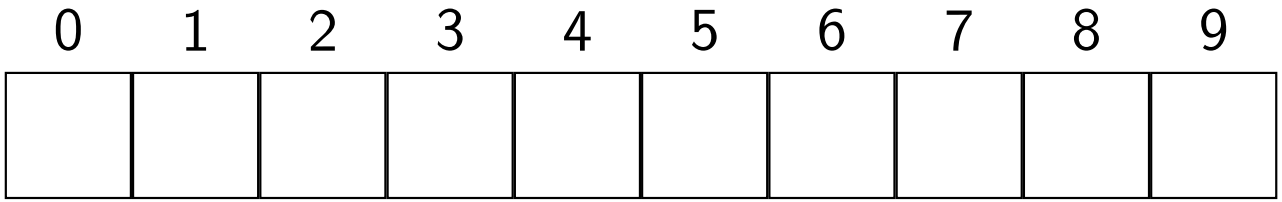
Förenkling

Antag att nycklarna är heltal mellan 0 och 9

Förenkling

Antag att nycklarna är heltal mellan 0 och 9

Vi använder nyckeln som index i ett array!

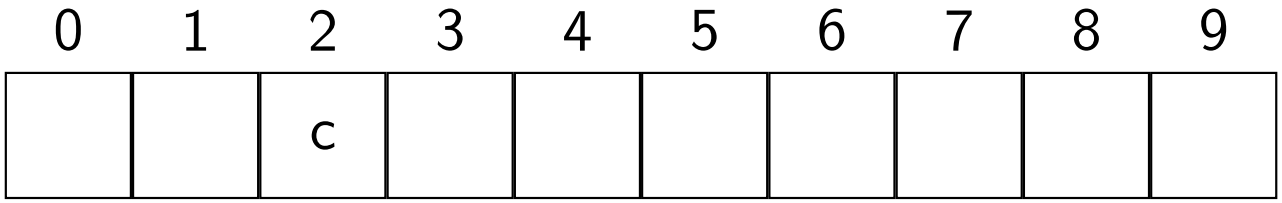


Sätt in: 2, c

Förenkling

Antag att nycklarna är heltal mellan 0 och 9

Vi använder nyckeln som index i ett array!



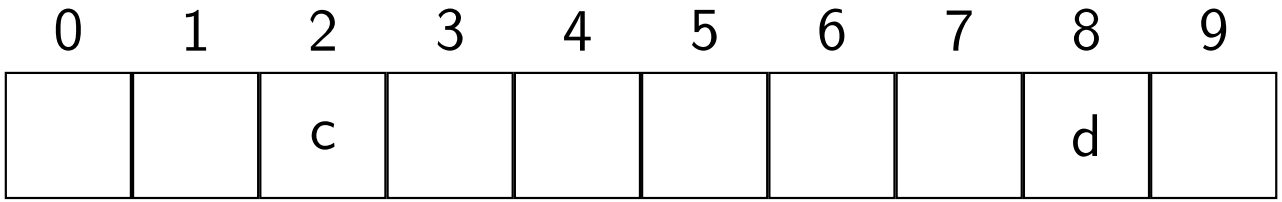
Sätt in: 2, c

Sätt in: 8, d

Förenkling

Antag att nycklarna är heltal mellan 0 och 9

Vi använder nyckeln som index i ett array!



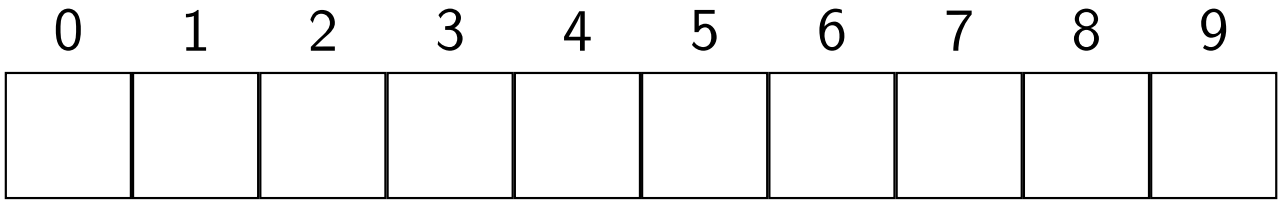
Sätt in: 2, c

Sätt in: 8, d

Om vi inte vet något intervall?

Antag att nycklarna är heltal

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index!

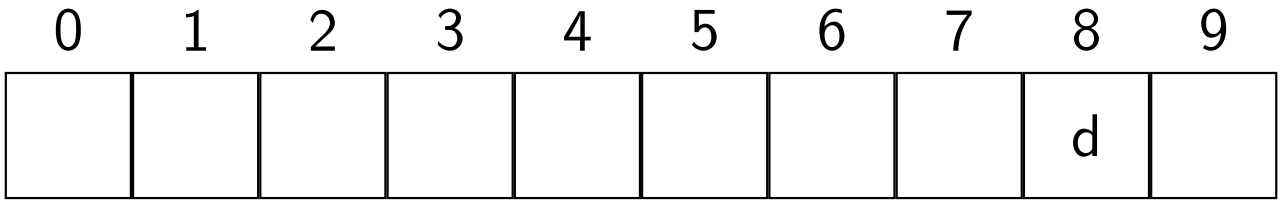


Sätt in: 8, d

Om vi inte vet något intervall?

Antag att nycklarna är heltal

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index!



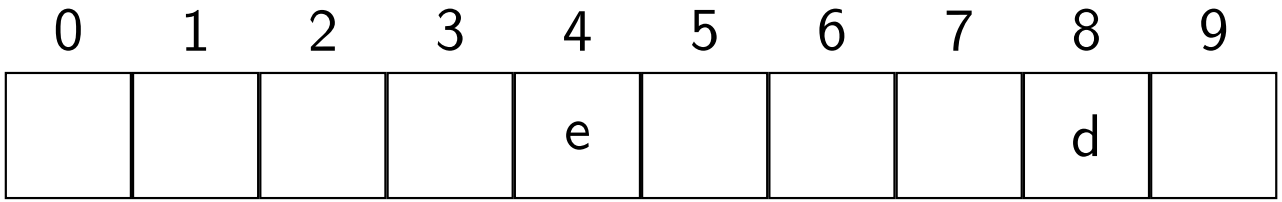
Sätt in: 8, d

Sätt in: 54, e

Om vi inte vet något intervall?

Antag att nycklarna är heltal

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index!



Sätt in: 8, d

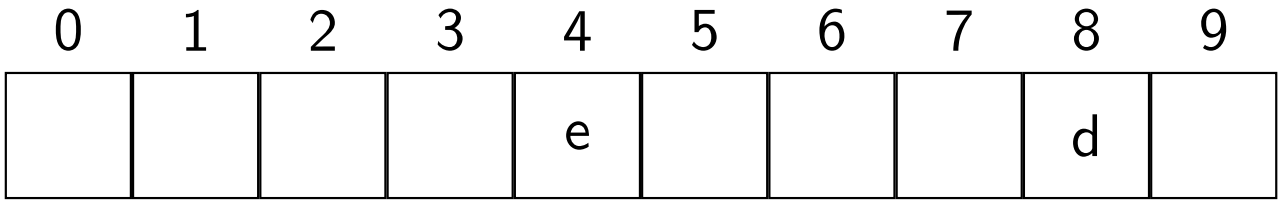
Sätt in: 54, e

Hämta: 54 $\Rightarrow$ e

Om vi inte vet något intervall?

Antag att nycklarna är heltal

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index!



Sätt in: 8, d

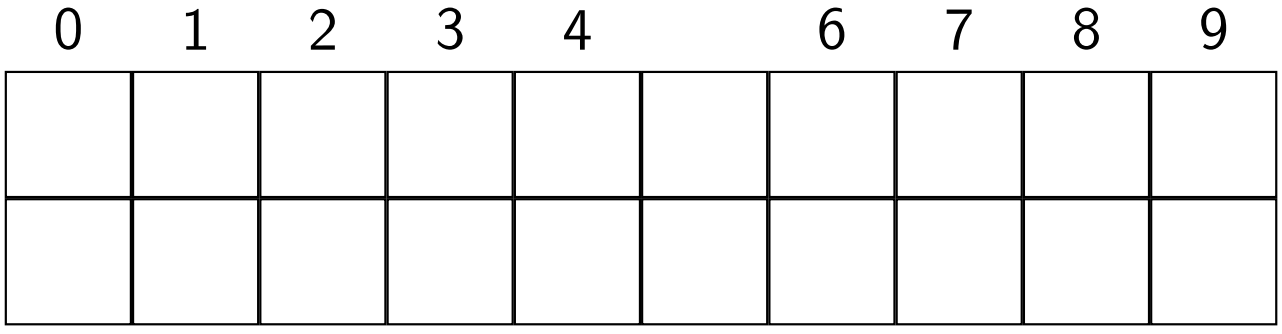
Sätt in: 54, e

Hämta: 54 $\Rightarrow$ e

Hämta: 28 $\Rightarrow$ d **?**

Om vi inte vet något intervall?

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index! Lagra även nyckeln.



Sätt in: 8, d

Om vi inte vet något intervall?

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index! Lagra även nyckeln.

0	1	2	3	4		6	7	8	9
								8	
								d	

Sätt in: 8, d

Sätt in: 54, e

Om vi inte vet något intervall?

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index! Lagra även nyckeln.

0	1	2	3	4		6	7	8	9
				54				8	
				e				d	

Sätt in: 8, d

Sätt in: 54, e

Hämta: 28 $\Rightarrow$ tomt

Om vi inte vet något intervall?

Vi använder nyckeln **modulo längden** som index! Lagra även nyckeln.

0	1	2	3	4		6	7	8	9
				54				8	
				e				d	
								?	

Sätt in: 8, d

Sätt in: 54, e

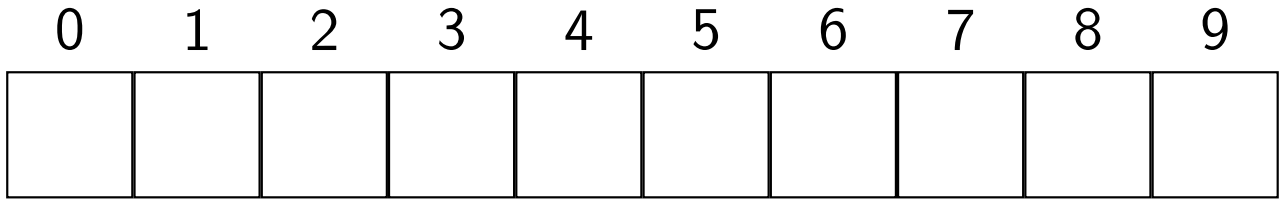
Hämta: 28 $\Rightarrow$ tomt

Sätt in: 38: f

LINKÖPING UNIVERSITY

Separat länkning

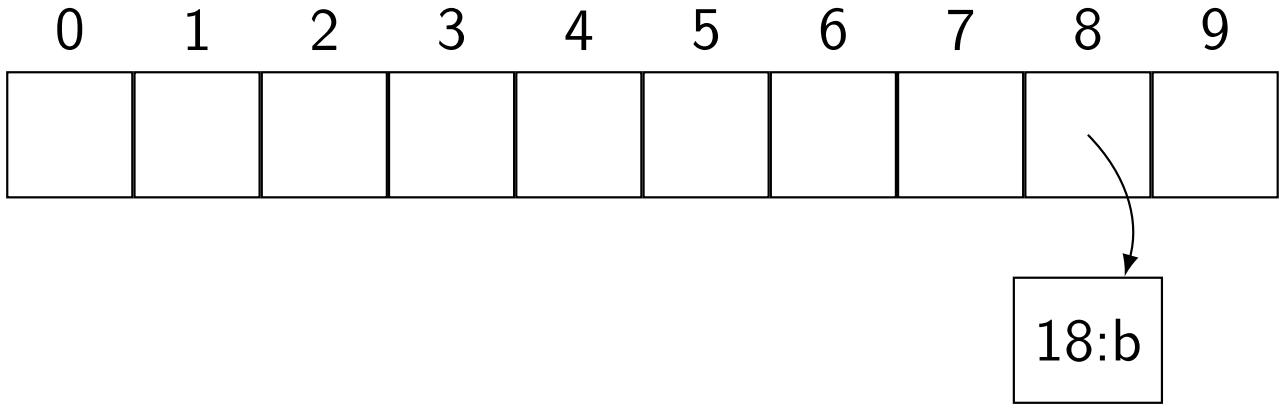
Idé: Använd länkade listor för att lagra fler element på samma index.



Sätt in 18:b

Separat länkning

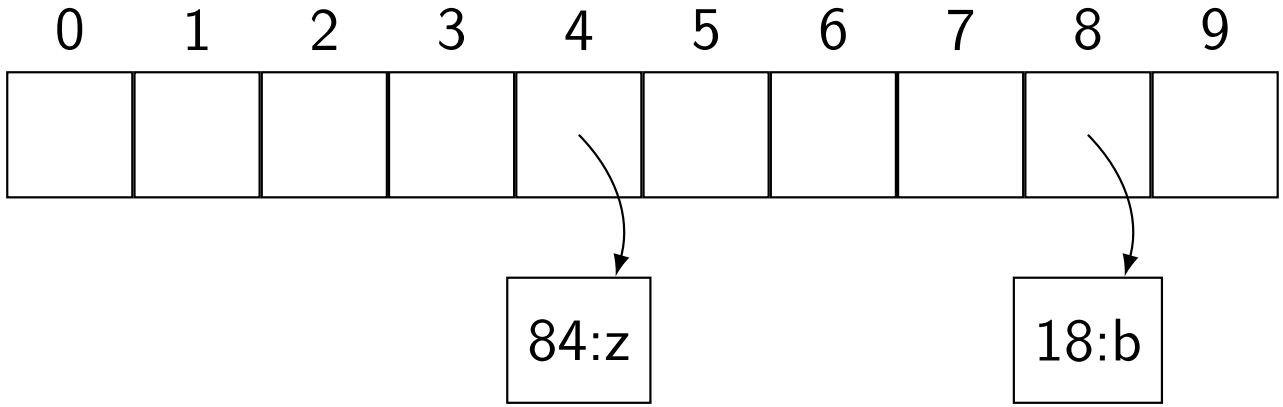
Idé: Använd länkade listor för att lagra fler element på samma index.



Sätt in 18:b, 84:z

Separat länkning

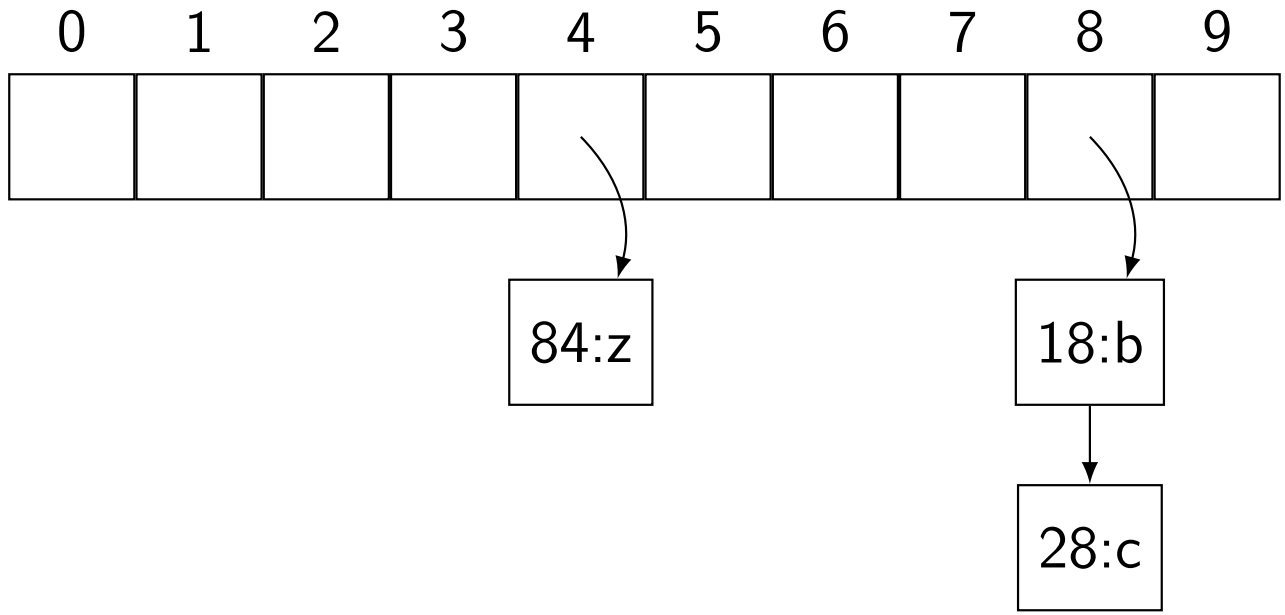
Idé: Använd länkade listor för att lagra fler element på samma index.



Sätt in 18:b, 84:z, 28:c

Separat länkning

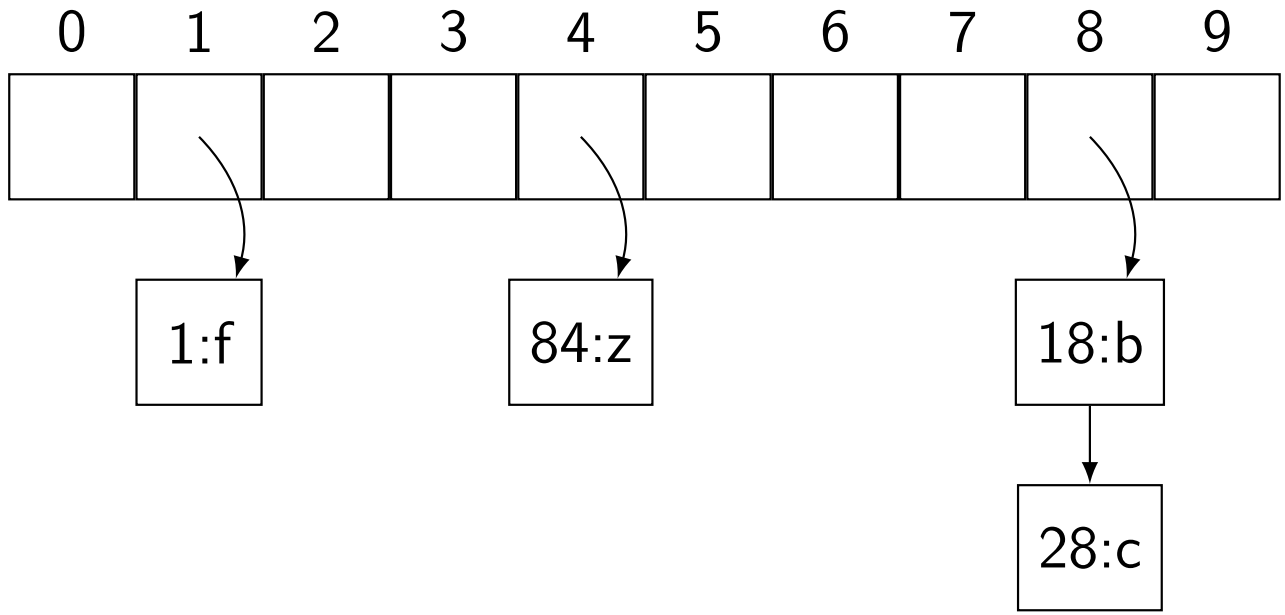
Idé: Använd länkade listor för att lagra fler element på samma index.



Sätt in 18:b, 84:z, 28:c, 1:f

Separat länkning

Idé: Använd länkade listor för att lagra fler element på samma index.



Sätt in 18:b, 84:z, 28:c, 1:f

Hur effektivt är detta?

- Uppslagning
  1. Hitta rätt plats i arrayen
  2. Hitta elementet i listan
- Insättning
  1. Hitta rätt plats i arrayen
  2. Se om elementet redan finns
  3. Sätt in i listan

Hur effektivt är detta?

- Uppslagning
  1. Hitta rätt plats i arrayen $\mathcal{O}(1)$
  2. Hitta elementet i listan $\mathcal{O}(c)$
- Insättning
  1. Hitta rätt plats i arrayen $\mathcal{O}(1)$
  2. Se om elementet redan finns $\mathcal{O}(c)$
  3. Sätt in i listan $\mathcal{O}(1)$

$c =$ antal element i en kedja (antal kollisioner)

Hur effektivt är detta?

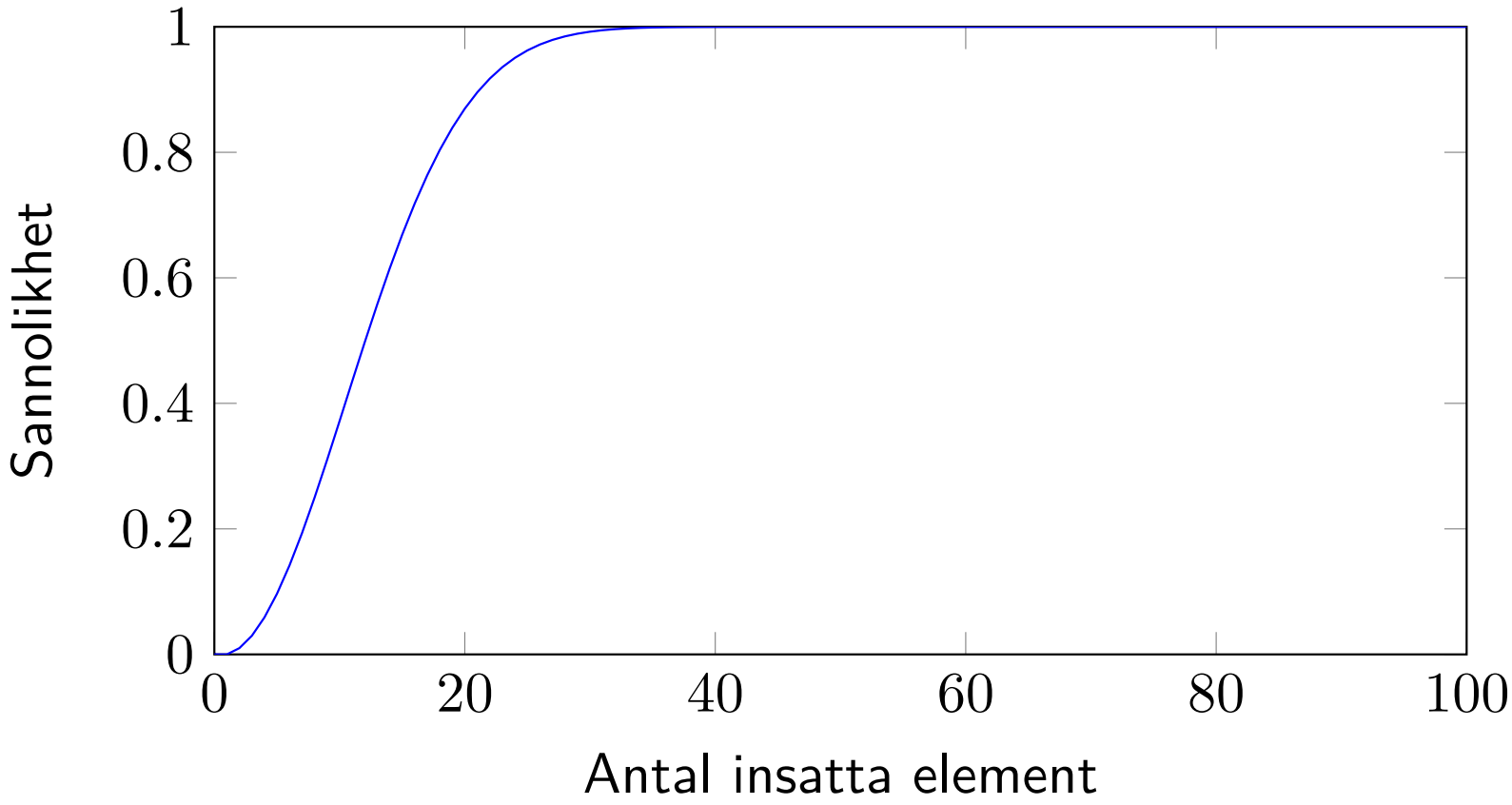
- Uppslagning
  1. Hitta rätt plats i arrayen $\mathcal{O}(1)$
  2. Hitta elementet i listan $\mathcal{O}(c)$
- Insättning
  1. Hitta rätt plats i arrayen $\mathcal{O}(1)$
  2. Se om elementet redan finns $\mathcal{O}(c)$
  3. Sätt in i listan $\mathcal{O}(1)$

$c =$ antal element i en kedja (antal kollisioner)

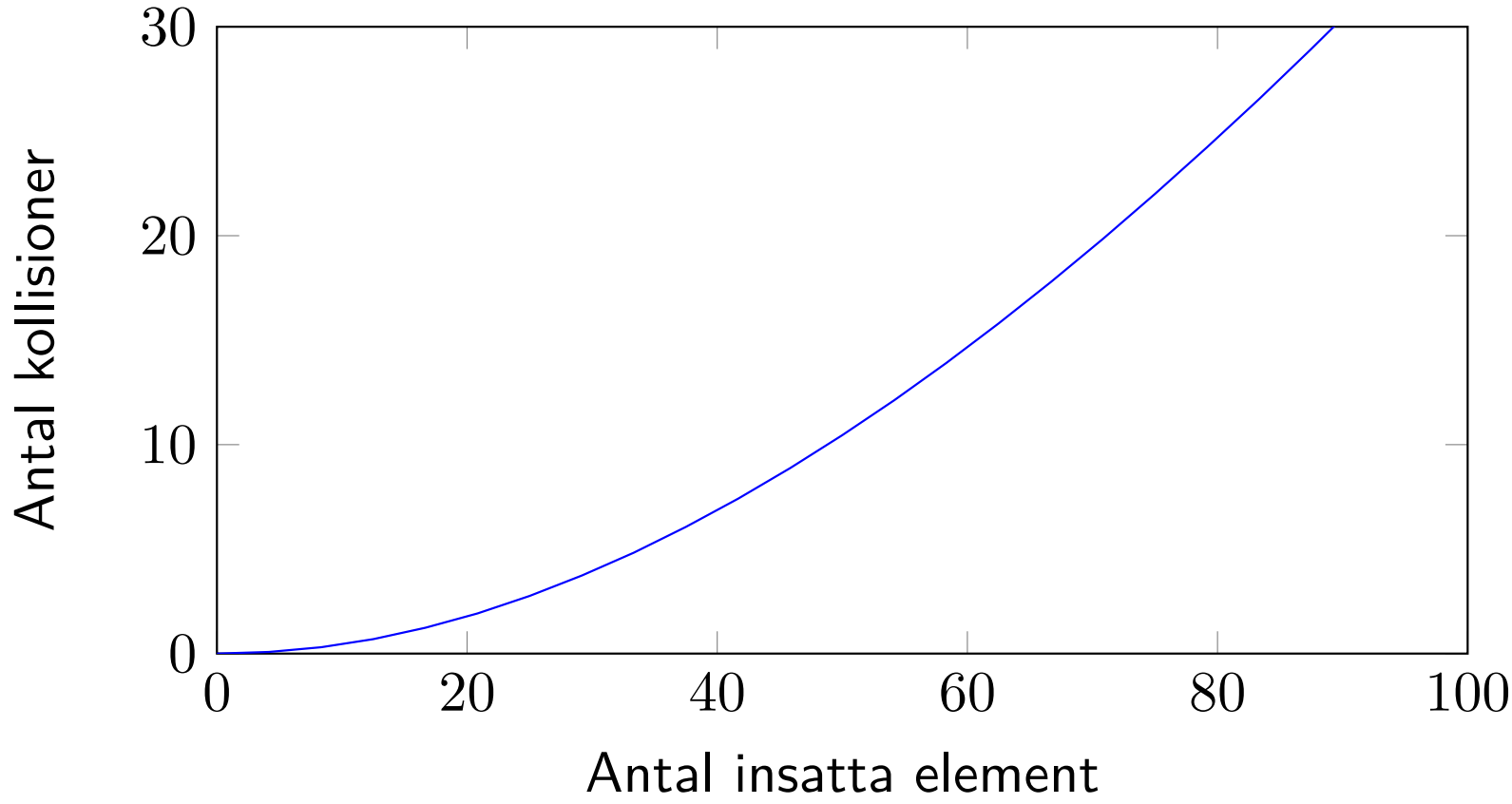
Om elementen är utspridda: $c \approx \frac{n}{m}$ $m =$ arraystorlek

Alltså: $c \approx 1$

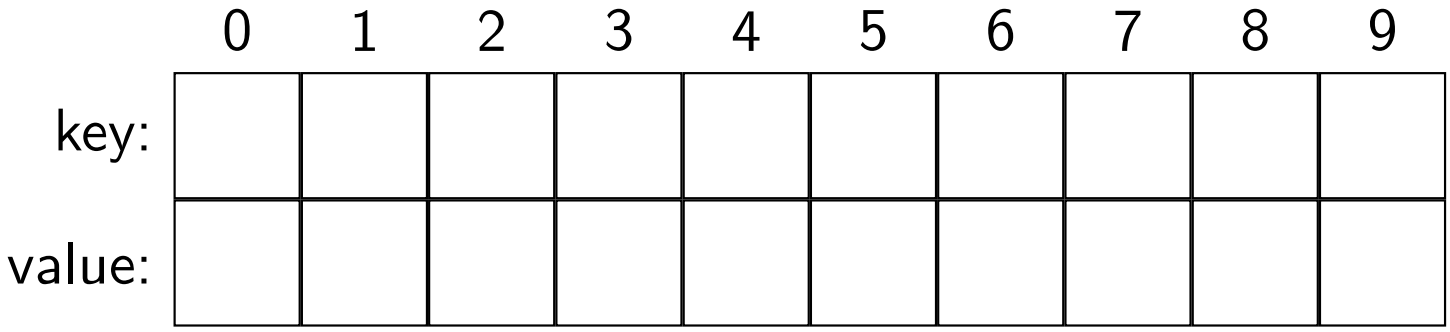
Hur ofta förekommer kollisioner? (tabellstorlek 100)



Hur många kollisioner blir det? (tabellstorlek 100)



Linjär sondering



Sätt in: 7:a

Linjär sondering

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:								7		
value:								a		

Sätt in: 7:a, 22:b

Linjär sondering

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:			22					7		
value:			b					a		

Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c

Linjär sondering

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:			22					7	17	
value:			b					a	c	

Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d

Linjär sondering

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:			22					7	17	8
value:			b					a	c	d

Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d, 37:e

Linjär sondering

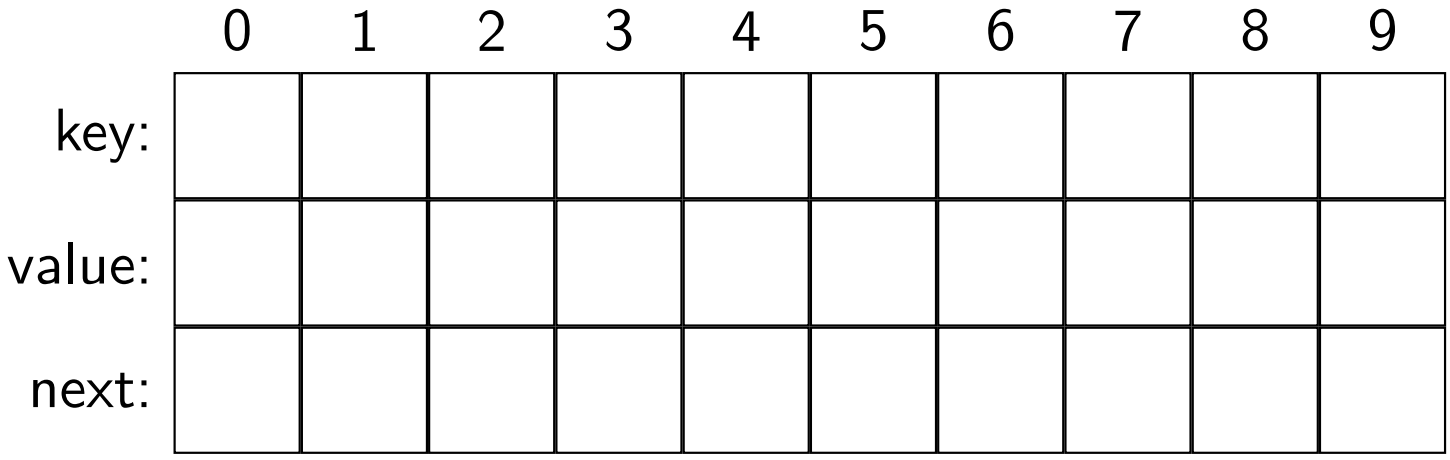
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:	37		22					7	17	8
value:	e		b					a	c	d

Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d, 37:e

Andra sonderingsalternativ

- Linjär sondering: $v + i$
- Annan steglängd: $v + 3i$
- Kvadratisk sondering: $v + i^2$

Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a

Hastabell i Lua – en blandning

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:								7		
value:								a		
next:								-		

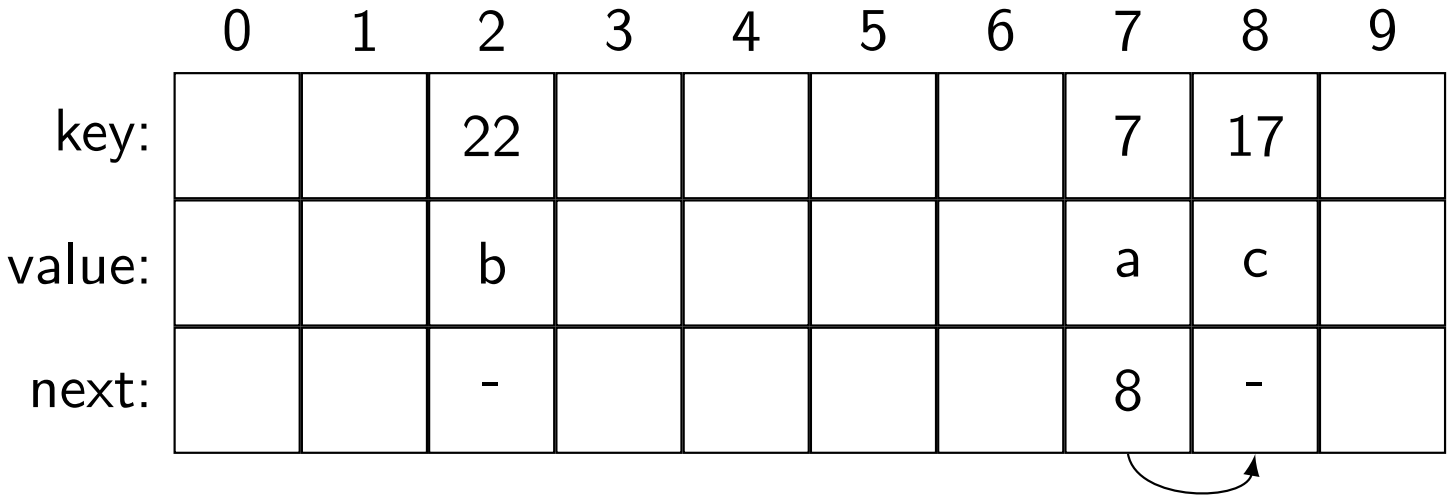
Sätt in: 7:a, 22:b

Hastabell i Lua – en blandning

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key:			22					7		
value:			b					a		
next:			-					-		

Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c

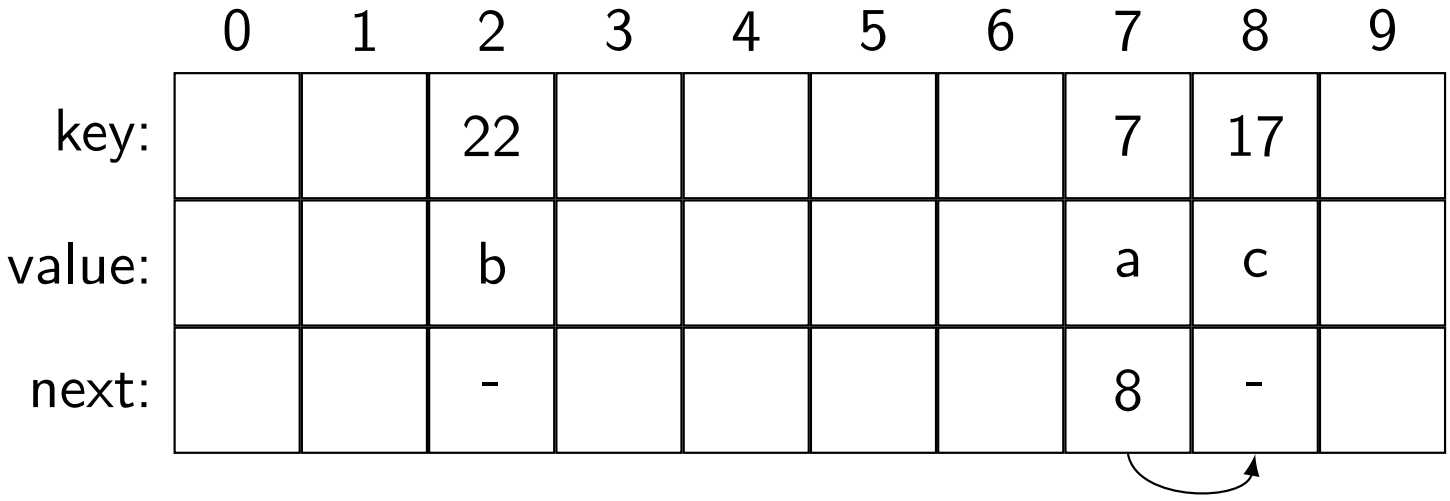
Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c

Hitta: 17, 28

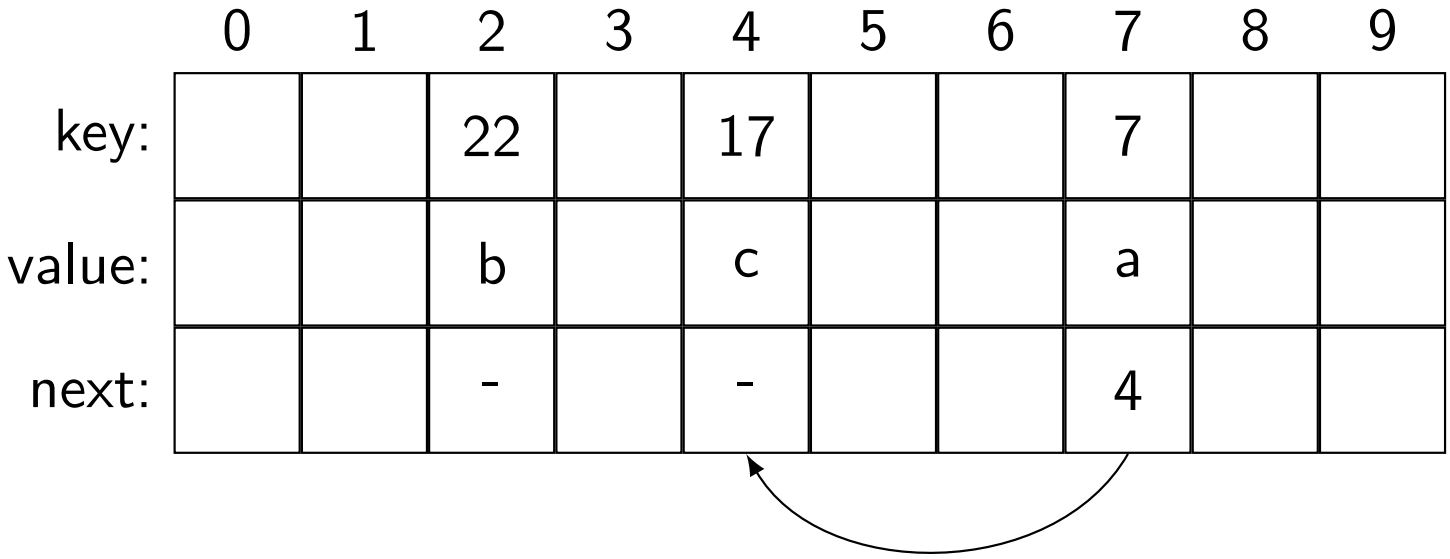
Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d

Hitta: 17, 28

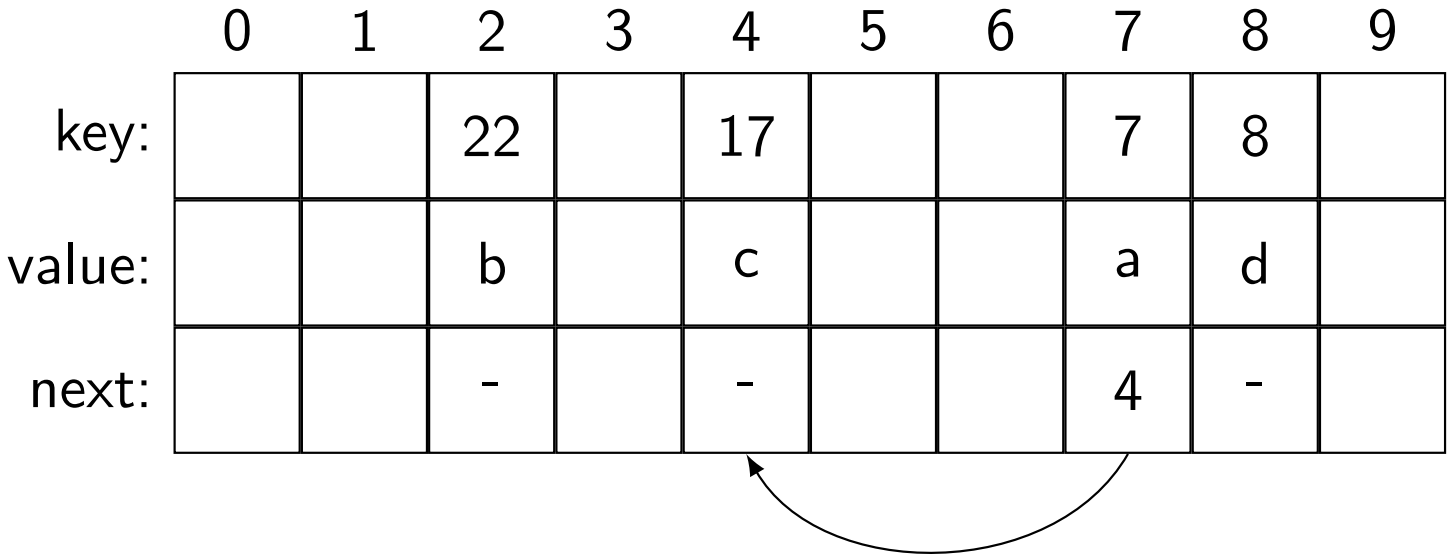
Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d

Hitta: 17, 28

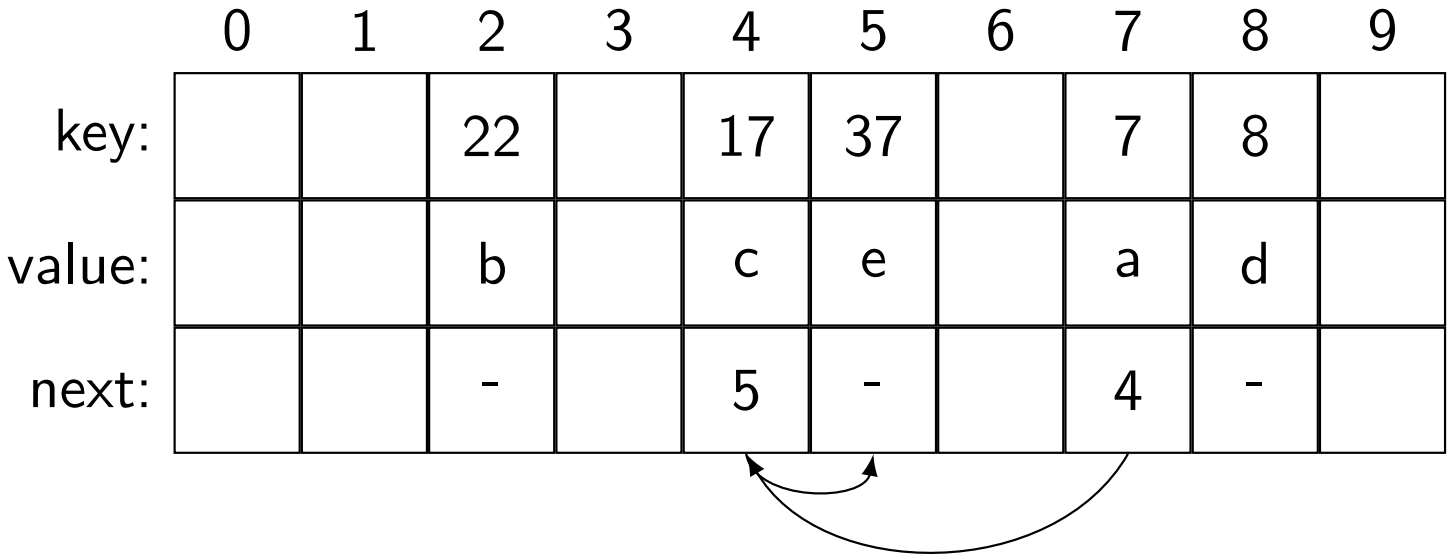
Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d, 37:e

Hitta: 17, 28

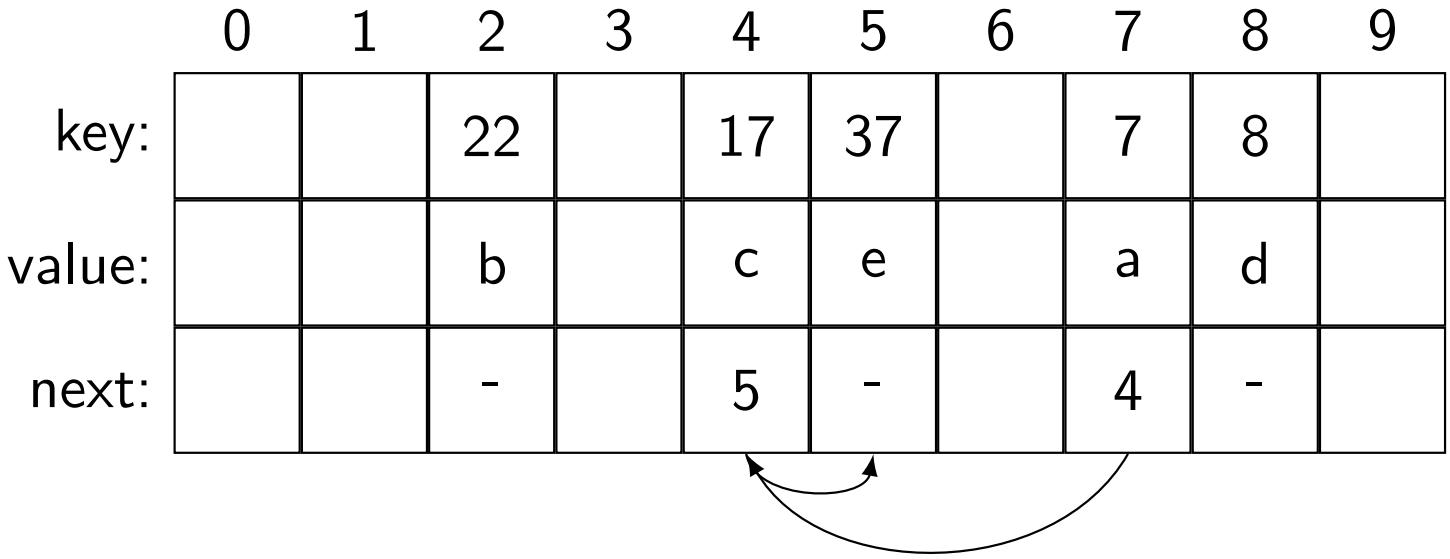
Hastabell i Lua – en blandning



Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d, 37:e

Hitta: 17, 28

Hastabell i Lua – en blandning

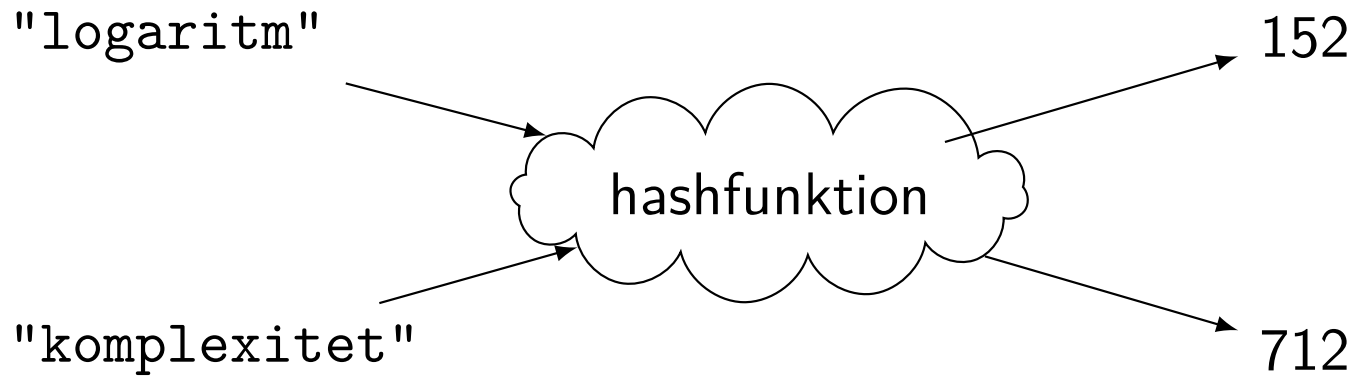


Sätt in: 7:a, 22:b, 17:c, 8:d, 37:e

Hitta: 17, 28, 37, 44

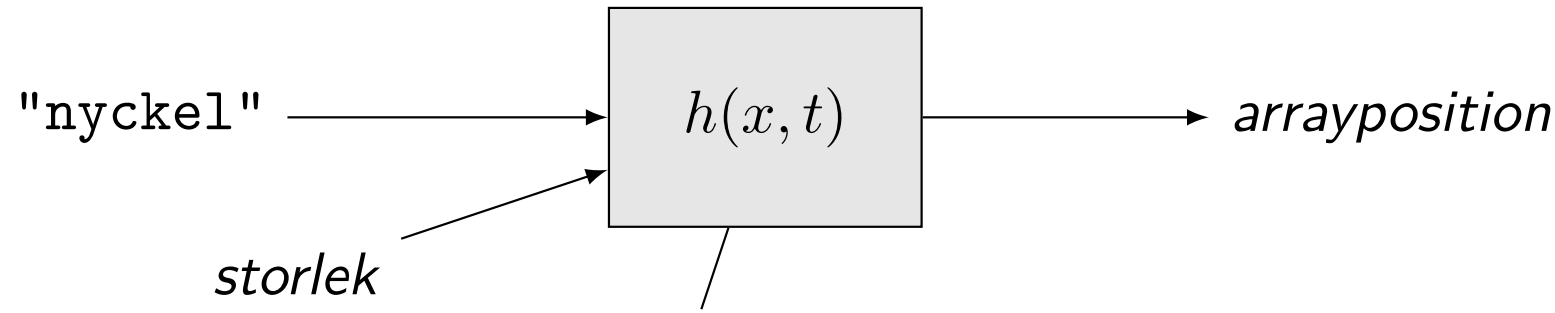
LINKÖPING UNIVERSITY

Hashfunktioner – idé

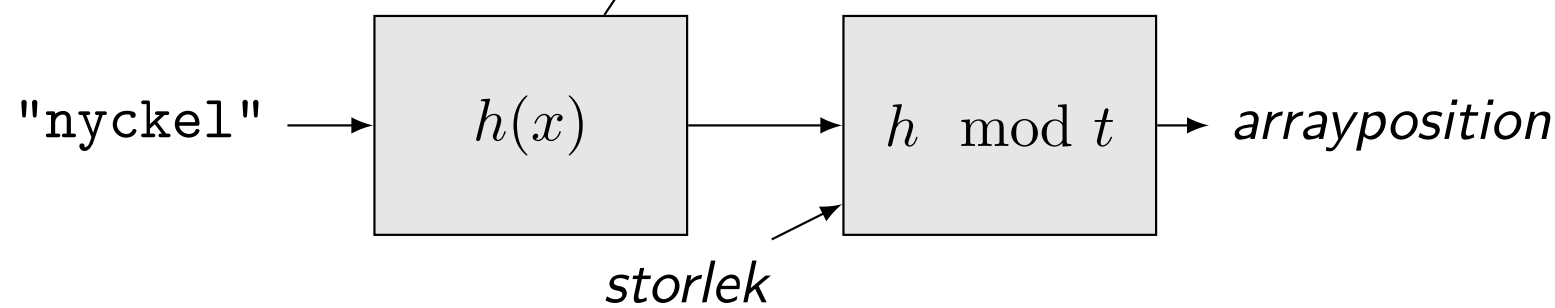


Terminologi

Literatur:



Implementation:



Egenskaper hos en hashfunktion

För två nycklar, x och y, samt en hashfunktion $h(k)$ gäller:

$$x = y \implies h(x) = h(y)$$
$$h(x) \neq h(y) \implies x \neq y$$

Notera dock:

$$x \neq y \not\implies h(x) \neq h(y)$$
$$h(x) = h(y) \not\implies x = y$$

En bra hashfunktion

- Snabb
  Vi vill implementera en effektiv datastruktur
- Bra fördelning av nycklar
  Vi vill minska kollisioner i hashtabellen, därmed vill vi att så få tänkbara nycklar ska resultera i samma hashvärde!

Det är ofta en bra idé att använda en hashfunktion även för heltal, trots att vi hade kunnat använda dem direkt!

Exempel

```
struct data {
  int a;
  int b;
};

size_t hash(const data &v) {
  size_t result = v.a;
  result ^= v.b << 16;
  return result;
}
```

Mål: Vi tar indatan och försöker sprida ut den så mycket som möjligt i utdatan

Exempel – djb2

```
size_t hash(const std::string &v) {
  size_t result = 5381;
  for (char c : v) {
    // result = result * 33 + c;
    result = ((result << 5) + result) + c;
  }
  return result;
}
```

Mål: Vi tar indatan och försöker sprida ut den så mycket som möjligt i utdatan

Perfekt hashning

I vissa fall kan vi konstruera en hashfunktion så att

$$x = y \iff h(x) = h(y)$$

Vi säger då att $h(x)$ är en *perfekt hashfunktion*. Det kan exempelvis utnyttjas för att implementera billiga jämförelser (datatypen *symbol* i Lisp), eller för att förbättra prestandan hos en hashtabell.

Exempel: Hashning av en enum, hashning av heltal, ...

LINKÖPING UNIVERSITY

Hashtabell eller sökträd?

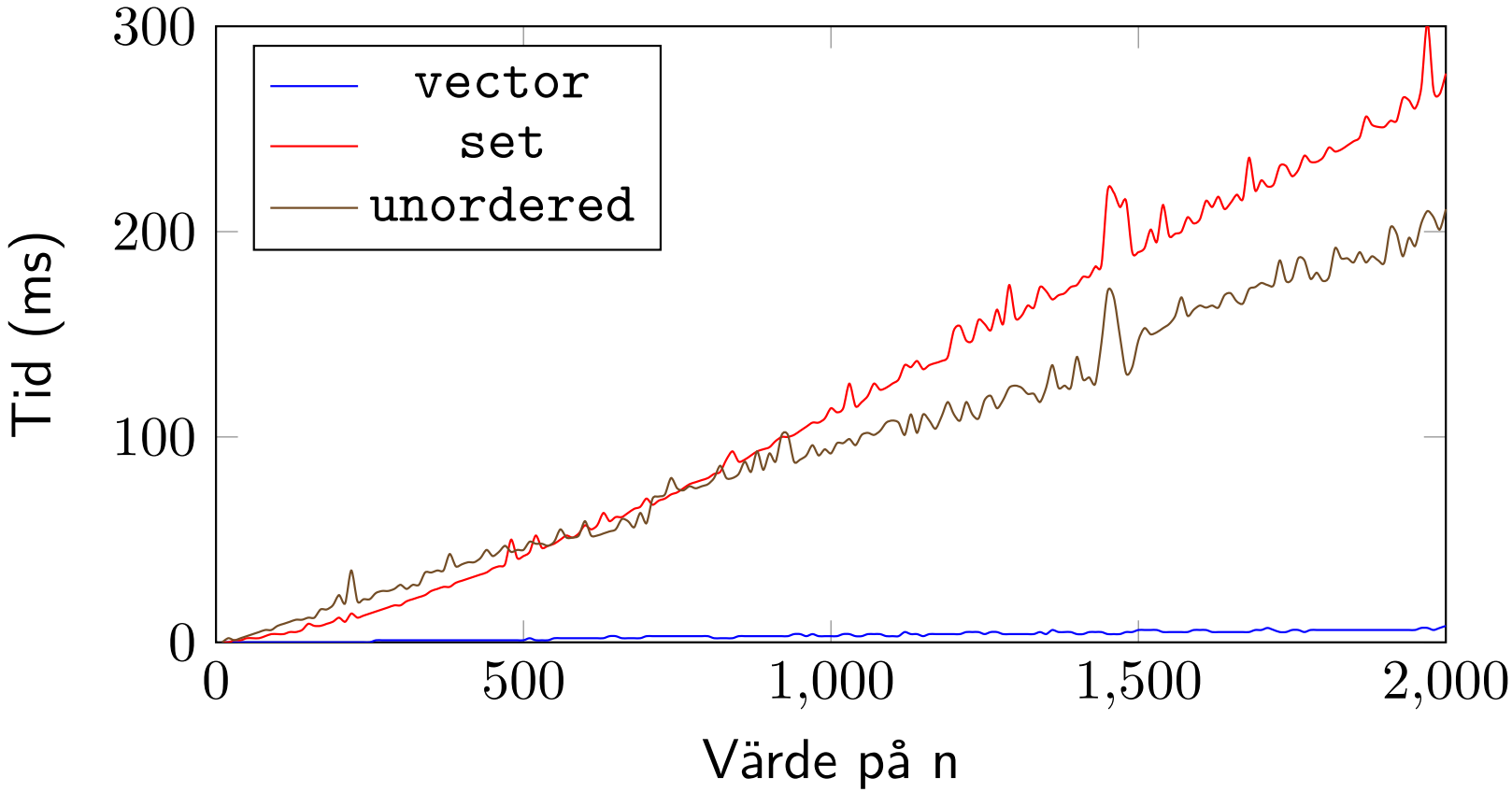
	Hashtabell	**Sökträd**
Krav på `Key`	`==`, `hash()`	`<`
Tidkomplexitet	$\mathcal{O}(1)$[1]	$\mathcal{O}(\log(n))$
Elementens ordning	odefinierad	sorterad

[1] amorterad tid, antar att en bra hashfunktion används

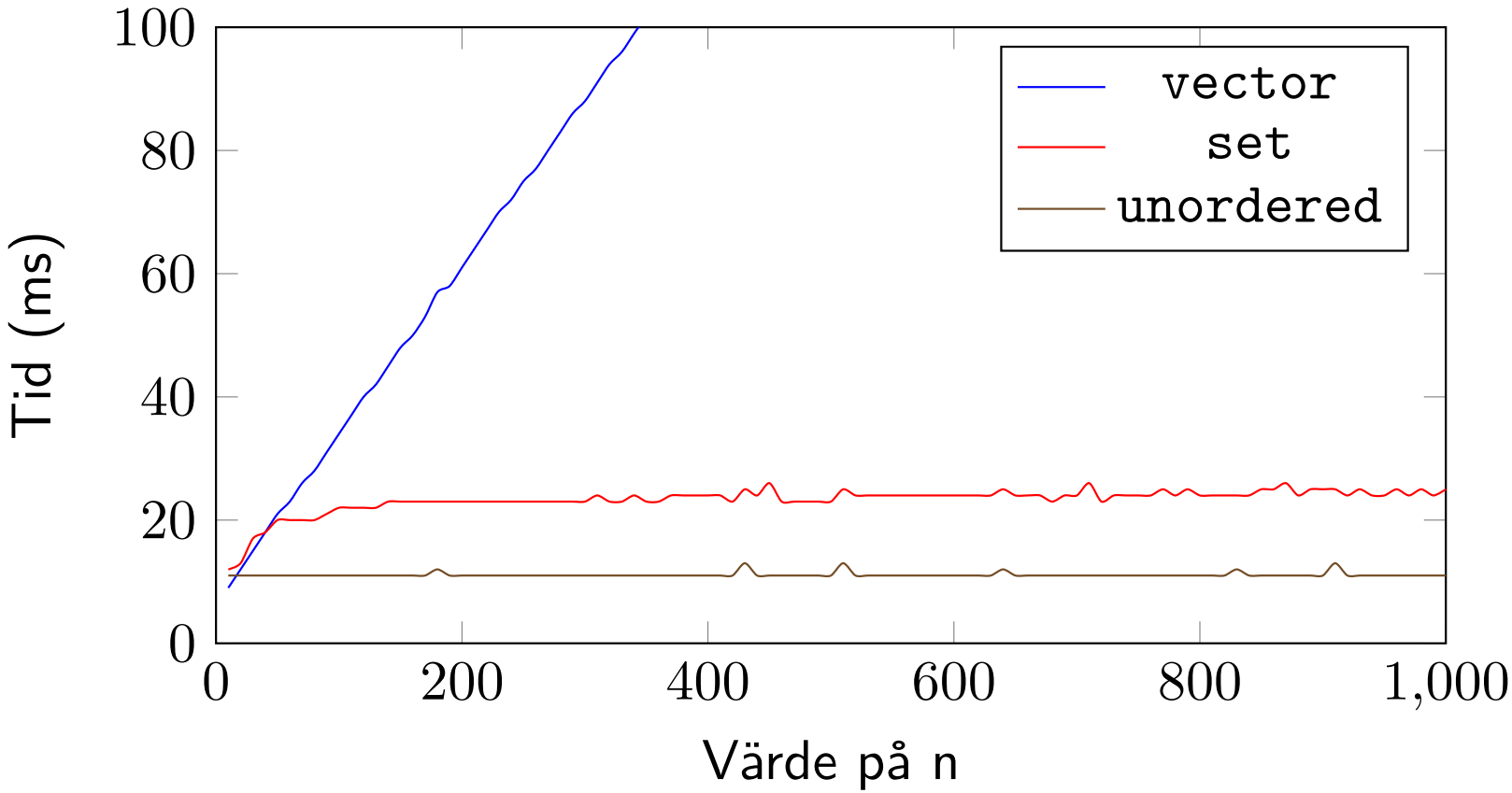
Testkörning (kompilerat med -O2)

```
$ time lookup_vector >/dev/null <thesis.txt
real    0m10.174s
user    0m10.136s
sys     0m0.028s
$ time lookup_set >/dev/null <thesis.txt
real    0m0.129s
user    0m0.116s
sys     0m0.008s
$ time lookup_uset >/dev/null <thesis.txt
real    0m0.078s
user    0m0.060s
sys     0m0.016s
```

Insättning, 1 000 körningar per indata



Uppslagning, 100 000 körningar per indata



LINKÖPING UNIVERSITY

Memoisering

Tänk tillbaka på fibonacci:

```
int fibonacci(int x) {
  int result = 1;
  if (x > 1)
    result = fibonacci(x - 1) + fibonacci(x - 2);

  return result;
}
```

Komplexitet: $\mathcal{O}(n^2)$

Memoisering

```
unordered_map<int, int> table;
int fibonacci(int x) {
  auto i = table.find(x);
  if (i != table.end())
    return i->second;

  int result = 1;
  if (x > 1)
    return fibonacci(x - 1) + fibonacci(x - 2);

  table[x] = result; // Kom ihåg!
  return result;
}
```

Meet in the middle

Antag att vi vill hitta alla lösningar till följande problem:

$$x^2 + y = 1 \mod 5 \quad 0 \leq x, y < 5$$

- Vi kan söka igenom alla möjligheter $\Rightarrow$ dyrt
- Vi kan delar upp problemet i två, och mellanlagrar resultaten i en tabell!

LINKÖPING UNIVERSITY

I kursen framöver

- Denna veckan
  - Se till att börja på lab 2
- Nästa föreläsning
  - Grafer och enkla grafalgoritmer
- Uppgifter i Kattis
  - `compoundwords` (enkel)
    Hitta sammansatta ord.
  - `setstack` (svårare)
    Tänk på tidsåtgången – hur illa kan det bli? Kan vi använda oss av perfekt hashning?

Filip Strömbäck

www.liu.se