Map/Dictionary, hashtabeller

TDDE22, 725G97: DALG

Magnus Nielsen

LINKÖPING UNIVERSITY

LINKÖPING UNIVERSITY

ADT Map

- Domän: mängder av poster/par (*nyckel*, *värde*)
  Mängderna är partiella funktioner som avbildar nycklar på värden!

- Typiska operationer:
  - size() - storlek (antalet par i mängden)
  - isEmpty() - är mängden tom
  - get(k) - hämta informationen associerad med nyckeln$k$ eller **null** om någon sådan nyckel inte finns
  - put(k, v) - lägg till (k, v) till mängden och returnera **null** om k är ny; ersätt annars värdet med v och returnera det gamla värdet
  - remove(k) - ta bort post (k, v) och returnera v; returnera **null** om mängden inte har någon sådan post

ADT Map

- Exempel:
  - Kursdatabas: (kod, namn)
  - Associativt minne: (adress, värde)
  - Gles matris: ((rad, kolumn), värde)
  - Lunchmeny: (dag, rätt)
- Statisk Map: inga uppdateringar tillåtna
- Dynamisk Map: uppdateringar *är* tillåtna

ADT Dictionary

- Domän: mängder av par (*nyckel*, *värde*)
  Mängderna är relationer mellan nycklar och värden!

- Typiska operationer:
  - size() - antalet par i mängden
  - isEmpty() - kolla om mängden är tom
  - find(k) - returnera någon post med nyckel k eller **null** om inget sådant par finns
  - findAll(k) - returnera en itererbar samling av alla poster med nyckel k
  - insert(k, v) - lägg till (k, v) och returnera den nya posten
  - remove(k, v) - ta bort och returnera paret (k, v); returnera **null** om det inte finns något sådant par
  - entries() - returnera itererbar samling av alla poster

ADT Dictionary

- Exempel:
  - Svensk-engelskt lexikon
    ..., (jakt, yacht), (jakt, hunting), ...
  - Telefonkatalog (flera nummer tillåtna)
  - Relation mellan liuid och avklarade kurser
  - Lunchmeny (med flera val): (dag, rätt)
- Statisk Dictionary: inga uppdateringar tillåtna
- Dynamisk Dictionary: uppdateringar *är* tillåtna

Implementation: Map, Dictionary

- Tabell/array: sekvens av minnesområden av lika storlek
  - Oordnad: ingen särskild ordning mellan $T[i]$ och $T[i+1]$
  - Ordnad: ...men här gäller $T[i] < T[i+1]$
- Länkad lista
  - Oordnad
  - Ordnad
- Hashning
- (Binära) sökträd (föreläsning 4)

Tabellrepresentation av Dictionary

Oordnad tabell:

find genom *linjärsökning*

- misslyckad uppslagning: n jämförelser $\Rightarrow O(n)$ tid
- lyckad uppslagning, värsta fallet: n jämförelser $\Rightarrow O(n)$ tid
- lyckad uppslagning, medelfallet med likformig fördelning av förfrågningar: $\frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n+1}{2}$ jämförelser $\Rightarrow O(n)$ tid

Tabellrepresentation av Dictionary

Ordnad tabell (nycklarna är linjärt ordnade):

find genom *binärsökning*

- uppslagning: $O(\log n)$ tid
- ...uppdateringar är dyra!!

Kan vi hitta på något bättre?

Ja, med hjälp av *hashtabeller*

- Idé: givet en tabell $T[0, \ldots, max]$ att lagra element i ...
  ...*hitta ett lämpligt tabellindex* för varje element
- Hitta en funktion h sådan att $h(key) \in [0, \ldots, max]$ och (idealt) sådan att $k_1 \neq k_2 \Rightarrow h(k_1) \neq h(k_2)$
- Lagra varje nyckel-värdepar (k, v) i $T[h(k)]$

Kursbokens terminologi: $h(k) = g(hc(k))$
hash code $hc : Nycklar \rightarrow Heltal$;
kompressionsfunktion $g : Heltal \rightarrow [0, \ldots, max]$

LINKÖPING UNIVERSITY

Hashtabell

- I praktiken ger inte hashfunktioner unika värden (de är inte *injektiva*)
- Vi behöver kollisionshantering

...och

- Vi behöver hitta en bra hashfunktion

Kollisionshantering

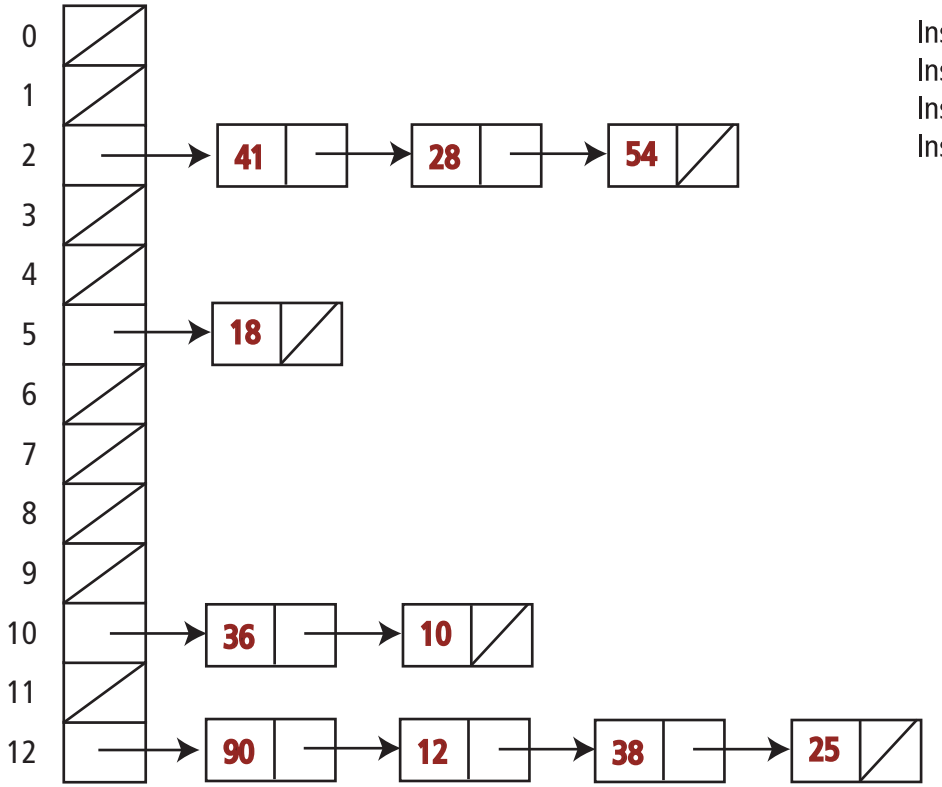
Två principer för att hantera kollisioner:

- Länkning: håll krockande data i länkade listor
  - *Separat länkning*: ha de länkade listorna utanför tabellen
  - *Samlad länkning*: lagra alla data *i* tabellen
- Öppen adressering: lagra alla data *i* tabellen och låt någon algoritm bestämma vilket index som ska användas vid en kollision

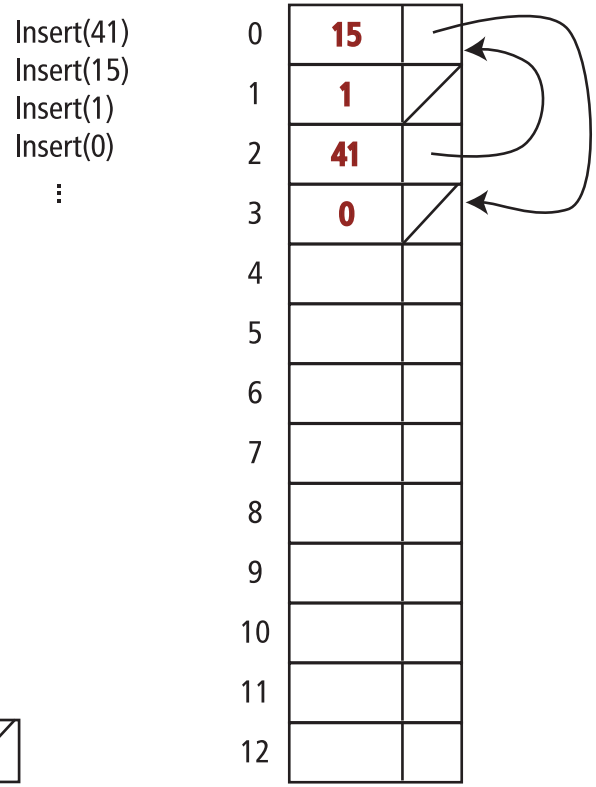
[Eng: Separate Chaining, Coalesced Chaining, Open Addressing]

Länkning

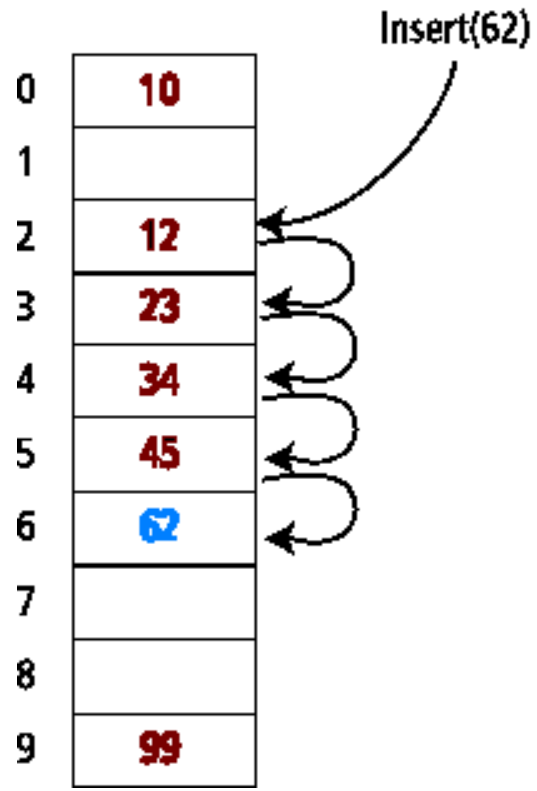
Separat länkning



Samlad länkning

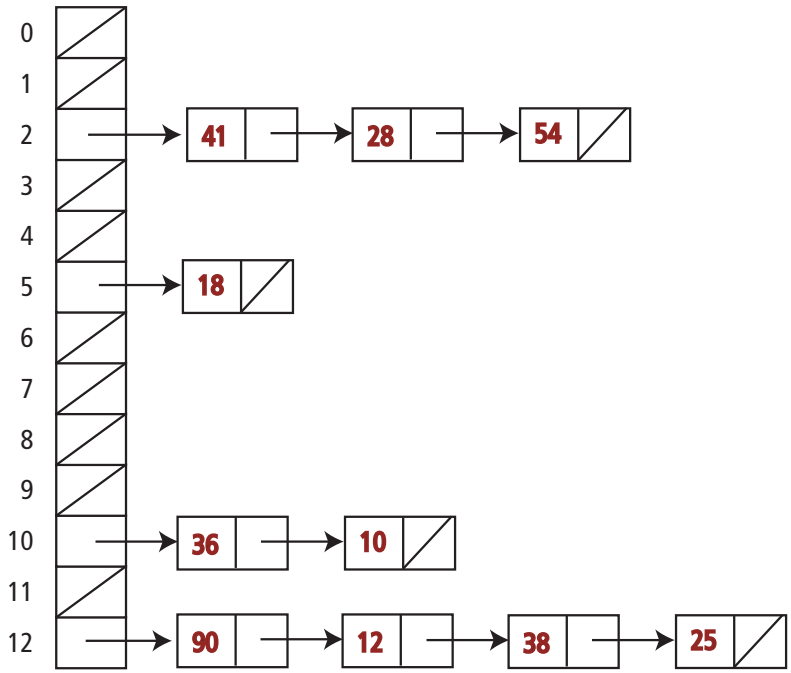


Öppen adressering



Exempel: hashning med separat länkning

- Hashtabell med storlek 13
- Hashfunktion h med $h(k) = k \bmod 13$
- Lagra 10 heltalsnycklar: 54, 10, 18, 25, 28, 41, 38, 36, 12, 90



Separat länkning: find

Givet: nyckel k, hashtabell T, hashfunktion h

- beräkna $h(k)$
- leta efter k i listan $T[h(k)]$ pekar ut

Notation: sondering= en access i den länkade listan

- 1 sondering för att komma åt listhuvudet (om icke-tomt)
- 1+1 sondering för att komma åt innehållet i första listelementet
- 1+2 sondering för att komma åt innehållet i andra listelementet
- ...

En sondering (att följa en pekare) tar konstant tid.
Hur många avpekningar P behövs för att hämta en post i hashtabellen?

Separat länkning: misslyckad uppslagning

- n dataelement
- m platser i tabellen

Värsta fallet:

- alla dataelement har samma hashvärde: $P = 1 + n$

Medelfallet:

- hashvärden likformigt fördelade över m:
- medellängd α av lista: $\alpha = n/m$
- $P = 1 + \alpha$

Separat länkning: lyckad uppslagning

Medelfallet:

- access av $T[h(k)]$ (början av en lista L): 1
- traversera $L \Rightarrow k$ hittas efter: $|L|/2$
- förväntat $|L|$ svarar mot α, alltså: förväntat $P = \alpha/2 + 1$

Samlad länkning: behåll elementen i tabellen

- Placera dataelementen i tabellen
- Utöka dem med pekare
- Lös kollisioner genom att använda första lediga plats

Kedjor kan innehålla nycklar med olika hashvärden...
...men alla nycklar med samma hashvärden dyker upp i samma kedja

Fördelar/nackdelar:

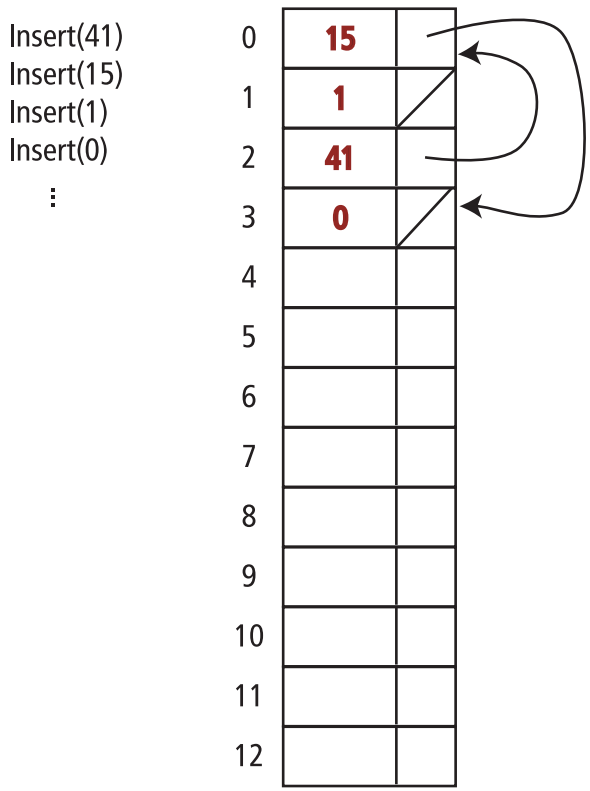
Samlad länkning: behåll elementen i tabellen

- Placera dataelementen i tabellen
- Utöka dem med pekare
- Lös kollisioner genom att använda första lediga plats

Kedjor kan innehålla nycklar med olika hashvärden...
...men alla nycklar med samma hashvärden dyker upp i samma kedja

Fördelar/nackdelar:
+ Relativt bra minnesanvändning
- Tabellen kan bli full
- Längre kollisionskedjor

Samlad länkning

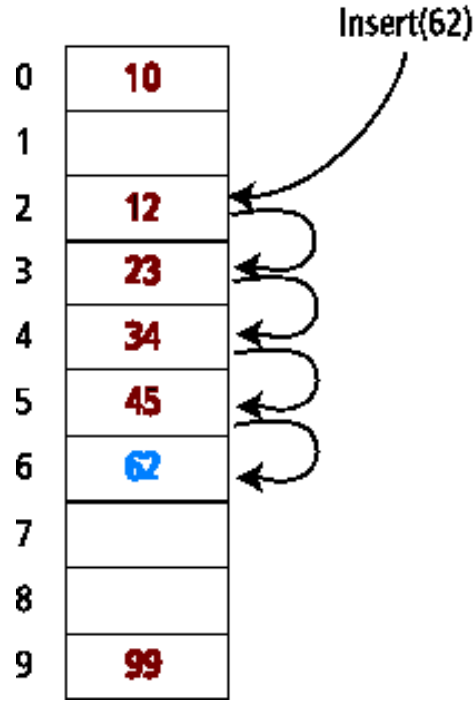


Öppen adressering

- Lagra alla element inuti tabellen
- Använd en fix algoritm för att hitta en ledig plats

Sekvensiell/linjär sondering

- önskvärt hashindex $j = h(k)$
- om konflikt uppstår gå till *nästa* lediga position
- om tabellen tar slut, gå till början av tabellen...



- Positioner i närheten av varandra fylls snabbt upp (*primärklustring*)
- Hur gör man remove(k)?

Öppen adressering — remove()

Elementet som ska tas bort kan vara del i en kollisionskedja – kan vi avgöra det?

Om det är del av en kedja kan vi inte bara ta bort elementet!

- Eftersom alla nycklar lagras, hasha om alla data som är kvar?
- Titta bland elementen efter, hasha om eller dra ihop när lämpligt, stanna vid första lediga position...?
- Ignorera – sätt in en markör "borttagen" (deleted) om nästa plats är icke-tom...

Dubbel hashning – eller vad göra vid kollision?

- Andra hashfunktion h_2 beräknar inkrement i fall av konflikter
- Inkrement utanför tabellen tas modulo $m = tableSize$

Linjär sondering är dubbel hashning med $h_2(k) = 1$
Krav på h_2:

- $h_2(k) \neq 0$ för alla k
- $h_2(k)$ har inga gemensamma delare med m för något k
  $\Rightarrow$ *alla* tabellpositioner kan nås

Ett vanligt val $h_2(k) = q - (k \bmod q)$ för $q < m$, q primtal (dvs, välj ett primtal mindre än tabellstorleken!)

Vad är en bra hashfunktion?

Antag att k är ett naturligt tal.

Hashning bör ge en likformig fördelning av hashvärden, *men* detta beror på *distributionen av nycklar* i datat som ska hashas.

Exempel: Hashning av efternamn i en genomsnittlig grupp LiU-studenter:

- hashfunktion: ASCII-värdet av sista bokstaven
  dåligt val: majoriteten av namn slutar med 'n'.

Hashning genom heltalsdivision

Låt m vara tabellstorleken

$$h(k) = k \bmod m$$

Undvik

- $m = 2^d$: hashning ger sista d bitarna i k
- $m = 10^d$: hashning ger d sista siffrorna

Man brukar föreslå primtal för m.

Se `http://burtleburtle.net/bob/hash/doobs.html` för vidare läsning.

LINKÖPING UNIVERSITY

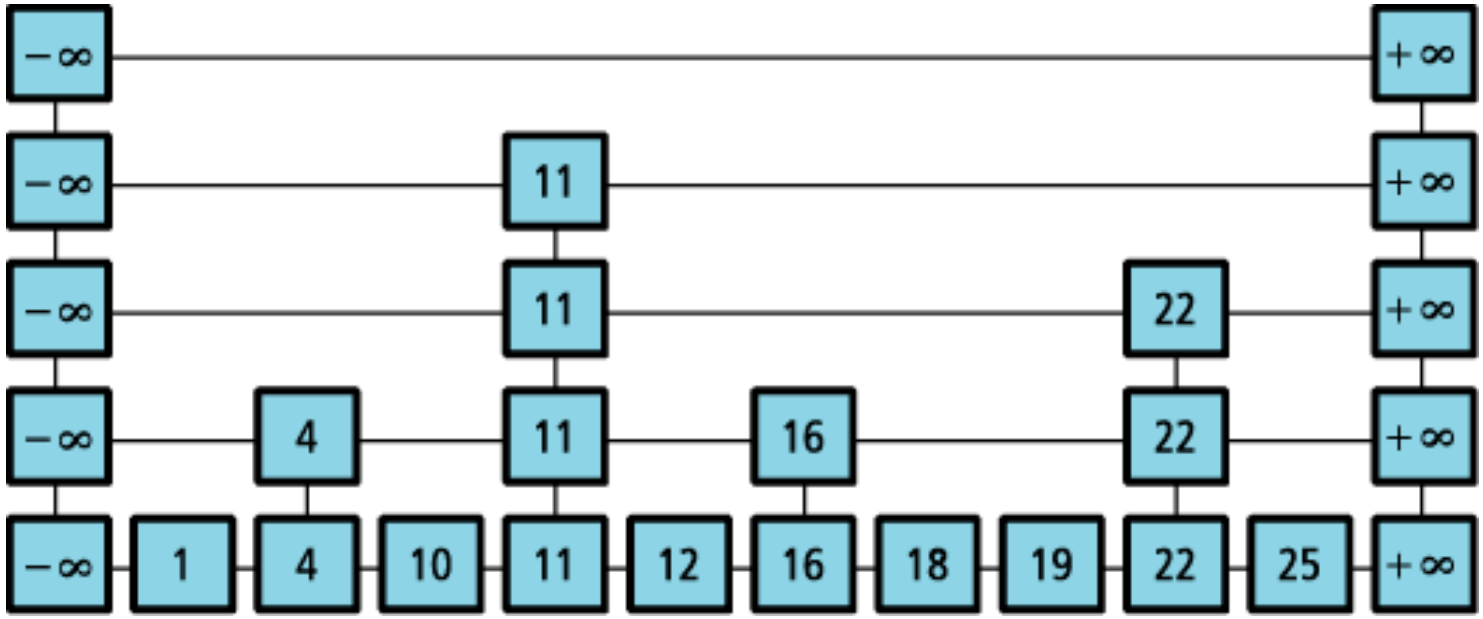
Skip-listor

- En hierarkisk länkad lista...
- Ett randomiserat alternativ för implementation av ADT Dictionary
- Insättning använder randomisering (”slantsingling”)
- Bra prestanda i det förväntade fallet
- Värstafallsprestanda i skip-listor inträffar väldigt sällan ($>$250 dataelement, risken att söktiden är mer än 3 ggr den förväntade är under 10^{-6})

Datastrukturen skip-lista

- Nivåer $L_1, \ldots, L_h$ av noder (nycklar, värden)
- Samma noder finns på flera nivåer (torn)
- Speciella nycklar: $-\infty$ och $+\infty$ ...mindre/större än varje riktig nyckel...
- Flera *nivåer* av dubbellänkade listor, glesare högre upp
  - Nivå 1: alla noder i en dubbellänkad lista mellan $-\infty$ och $+\infty$ ordnade enligt '$<$'-relationen
  - I medeltal finns hälften av noderna i L_i också i L_{i+1}
  - Speciella nycklar $-\infty$ och $+\infty$ finns på alla nivåer
  - Bara $-\infty$ och $+\infty$ finns på nivå L_h

Exempel: en skip-lista



Sökning

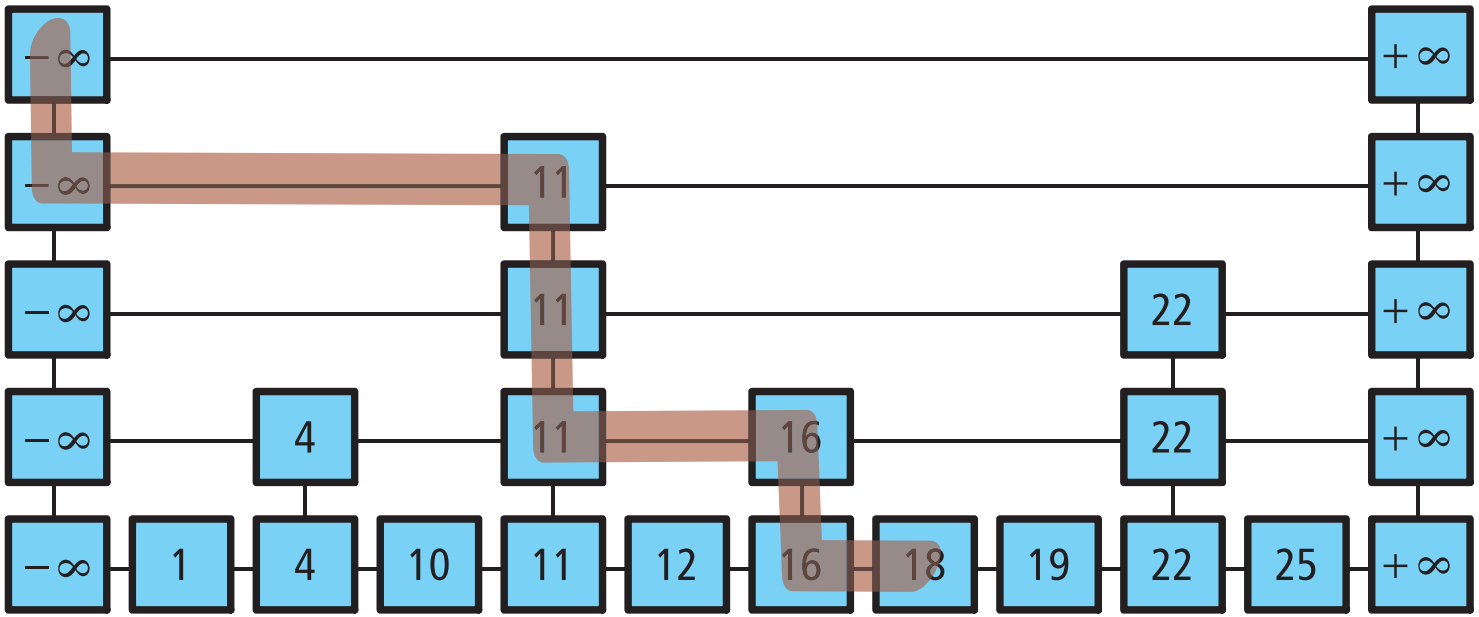
Sökning efter nyckel k:

- Följ listan på högsta nivån...
  - Stanna innan vi passerar något $k_i > k$ (vi riskerar att missa det vi letar efter)
  - Om vi hittat rätt, returnera det, annars...
- Vi har stannat på en nivå:
  - Har vi hittat nyckeln?
  - Nej, byt till nästa lägre nivå (via "sista tornet") och fortsätt leta
  - Returnerar: största nyckeln $k_i \leqslant k$ (vilket kan vara $+\infty$)

Sökning

Sökning efter nyckel k:

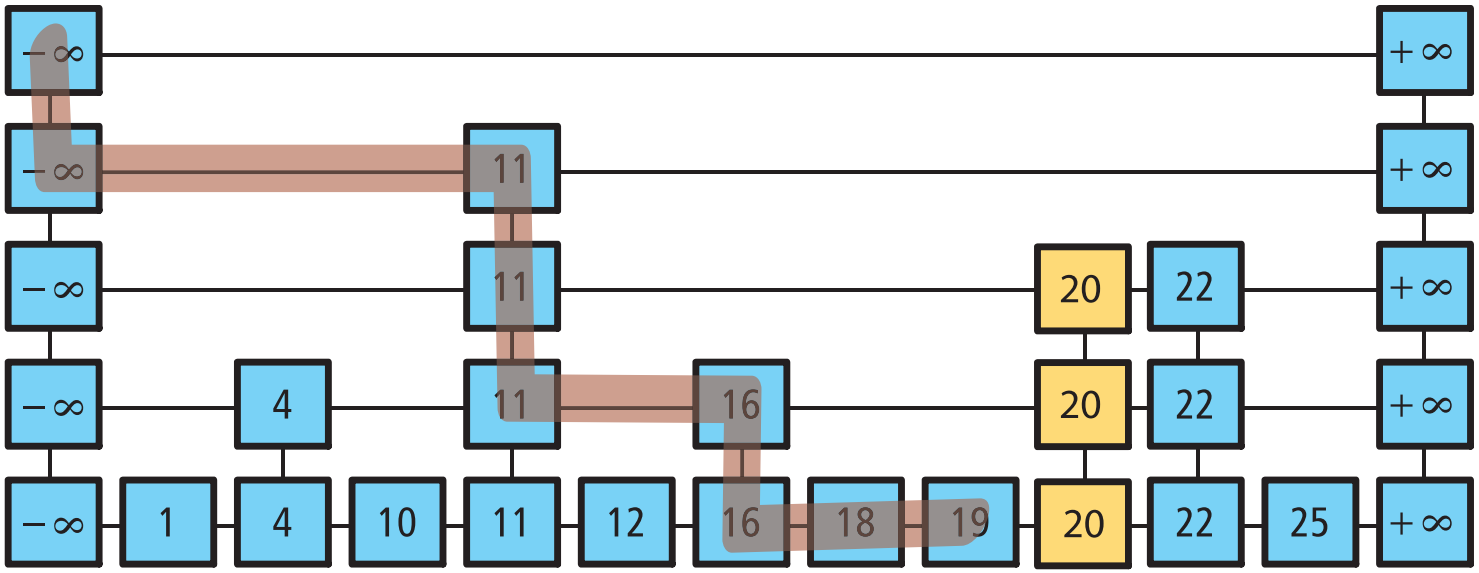
- Likheter med binärsökning – men för listor
- Exempel: find(18)



Insättning

function INSERT(x)
    $P \leftarrow$ FIND(x)
    if $P.value < x$ **then**
        sätt in en ny listnod efter P
        "singla slant" för att avgöra hur högt "tornet" ska vara:
        while "slantsingling"=ja **do**
            öka tornets höjd ett steg
            (öka möjligtvis höjden på skip-listan)

Exempel: insert(20)



Borttagning...och egenskaper

- Väldigt likt insert:
  - Sök
  - om hittat, ta bort och fixa länkarna mellan tornen
- Värstfallstiden för find, insert och remove i en skip-lista med n insatta element är $O(n + h)$
- Men förväntad exekveringstid (under antagandet att nycklarna är likformigt fördelade) är $O(\log n)$ om sökningen startar på höjd $\lfloor \log n \rfloor$

Nästa gång:
Träd...

www.liu.se

LINKÖPING UNIVERSITY