Lösningsförslag 2

Uppgift 1.

Notera först att problemet är i NP. Vi visar att problemet är NP-svårt via en polynomisk reduktion från 3SAT. Reduktionen görs enklast i två steg. Vi inför följande intermediära problem.

Problem. P1.

Instans. En rationell $m \times n$-matris A och en rationell m-vektor b.

Fråga. Finns en n-vektor x över värdemängden $\{0, 1\}$ sådan att $Ax \geq b$.

Låt F vara en godtycklig 3SAT-formel och låt oss betrakta en klausul $(p \vee \neg q \vee r)$. Man kan enkelt verifiera att denna klausul satisfieras av en tilldelning $\{p, q, r\} \to \{0, 1\}$ om och endast om

$$p + (1 - q) + r \geq 1. \tag{1}$$

Detta ger oss en enkel reduktion från 3SAT till P1: Ersätt varje klausul med en olikhet enligt samma princip som (1).

Det resulterande systemet av olikheter kan omedelbart skrivas om till en ekvivalent matris A och vektor b. Problemet nu är att vi inte får ett ekvationssystem $Ax = b$ utan ett olikhetssystem $Ax \geq b$. Detta kan vi ordna genom att införa två extravariabler per ekvation. Låt u, u' vara två nya variabler. Kom ihåg att variabler endast får tilldelas värden ur $\{0, 1\}$ och att detta medför följande:

$$p + (1 - q) + r \geq 1 \text{ om och endast om } p + (1 - q) + r + u + u' = 3. \tag{2}$$

Med denna transformation får vi ett ekvationssystem som vi kan skriva på matrisform $A'x' = b'$. Notera att alla steg i beräkningen av A' och b' kan göras i polynomisk tid. Vi har därmed visat att det finns en polynomisk reduktion från 3SAT till problemet i uppgiften och att problemet är NP-fullständigt.

Uppgift 2.

Problemet är i NP eftersom det är en begränsad variant av 3SAT. För att visa att problemet är NP-svårt så gör vi en reduktion från 3SAT. Låt $F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ vara en godtycklig 3SAT-formel. Notera följande: de två klausulerna $(p \vee q)$ och $(\neg p \vee \neg q)$ är satisfierade av tilldelningen $f : \{p, q\} \to \{0, 1\}$ om och endast om (1) $f(p) = 0$ och $f(q) = 1$ eller (2) $f(p) = 1$ och $f(q) = 0$. Man kan alltså använda dessa två klausuler för att ”simulera” negation.

Låt C vara en godtycklig klausul i F och betrakta denna transformation.

om $C = (p \vee q \vee r)$ så låt $C' = (p \vee q \vee r)$

om $C = (\neg p \vee q \vee r)$ så inför en ny variabel $\hat{p}$ och låt $C' = (p \vee p \vee \hat{p}) \wedge (\neg p \vee \neg p \vee \neg\hat{p}) \wedge (\hat{p} \vee q \vee r)$

om $C = (\neg p \vee \neg q \vee r)$ så inför två nya variabler $\hat{p}, \hat{q}$ och låt $C' = (p \vee p \vee \hat{p}) \wedge (\neg p \vee \neg p \vee \neg\hat{p}) \wedge (q \vee q \vee \hat{q}) \wedge (\neg q \vee \neg q \vee \neg\hat{q}) \wedge (\hat{p} \vee \hat{q} \vee r)$

om $C = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ så låt $C' = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Notera följande.

1. Formeln $F' = C_1' \wedge \cdots \wedge C_m'$ innehåller endast klausuler av de tillåtna typerna.

2. F är satisfierbar om och endast om F' är satisfierbar.

3. F' kan beräknas i polynomisk tid.

Det följer att problemet i uppgiften är NP-fullständigt.

Uppgift 3.

Vi börjar med att visa en polynomisk reduktion från 3-Färgning till 4-Färgning. Låt $G = (V, E)$ vara en godtycklig oriktad graf. Bilda grafen $G' = (V', E')$ genom att lägga till en ny nod x och ansluta x till alla andra noder. Om G är 3-färgbar så är G' 4-färgbar eftersom alla noder i V kan 3-färgas och x kan ges den fjärde färgen. Om G' är 4-färgbar så måste G vara 3-färgbar eftersom x är ansluten till alla andra noder—den ”förbrukar” en av de tillgängliga fyra färgerna. Denna reduktion kan uppenbarligen göras i polynomisk tid så 4-Färgning är ett NP-fullständigt problem.

Reduktionen ovan kan användas för att visa att 4-Färgning kan reduceras till 5-färgning, 5-färgning till 6-färgning och så vidare. Därav följer att k-färgning är ett NP-fullständigt problem för alla $k \geq 3$.

Uppgift 4.

Förslag 1. Låt $F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$ vara en instans av problemet. Låt C vara en klausul i F över variablerna p, q, r och låt

$$C' = C \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r).$$

De tillagda klausulerna tvingar att exakt en av p, q, r tilldelas sanningsvärdet 1. Alltså gäller att $F' = C_1' \wedge \cdots \wedge C_m'$ är satisfierbar om och endast om F har en tillåten modell. Transformationen från F till F' kan göras i polynomisk tid och den inför inga nya variabler. Vi vet att 3SAT kan lösas i $c^n \cdot \text{poly}(||F||)$ tid för $c < 2$ så problemet i uppgiften kan också lösas i $c^n \cdot \text{poly}(||F||)$ tid.

Förslag 2. Gör en rekursiv algoritm som för varje klausul C i formeln testar de tre tänkbara tilldelningarna. Exempelvis, om C innehåller variablerna p, q, r så gör man tre rekursiva anrop med (1) $p = 1, q = 0, r = 0$, (2) $p = 0, q = 1, r = 0$ och (3) $p = q = 0, r = 1$. Tidskomplexiteten beskrivs då av

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 3T(n-3) + \text{poly}(||F||)$$

där n är antalet variabler. Det följer att algoritmen går i $3^{n/3} \cdot \text{poly}(||F||)$ tid vilket är ungefär lika med $1.44^n \cdot \text{poly}(||F||)$ tid.

Uppgift 5.

Polynomisk reduktion från 3-Färgning. Låt grafen $G = (V, E)$ vara en godtycklig instans av 3-Färgning. För varje $v \in V$, introducera tre variabler v_R, v_G, v_B och klausulen $(v_R \vee v_G \vee v_B)$. Exakt en av dessa variabler kommer att vara sann i varje tänkbar lösning så vi kan tolka "v_R är sann" som "nod v har färg R" osv.

Betrakta nu en båge $e = (v, w) \in E$. Vi måste garantera att v_R, w_R inte är sanna samtidigt, att v_G, w_G inte är sanna samtidigt och att v_B, w_B inte är sanna samtidigt. Notera att det *inte* räcker att sätta $(\neg v_R \vee \neg w_R), (\neg v_G \vee \neg w_G), (\neg v_B \vee \neg w_B)$ eftersom vi måste garantera att exakt en literal i varje klausul är sann. Inför tre hjälpvariabler a_e, b_e, c_e och följande klausuler:

$$(\neg v_R \vee \neg w_R \vee a_e) \wedge (\neg v_G \vee \neg w_G \vee b_e) \wedge (\neg v_B \vee \neg w_B \vee c_e) \wedge (a_e \vee b_e \vee c_e).$$

Om exempelvis både v_R och w_R är sanna så gäller fortfarande att klausulerna ovan inte är satisfierbara. Antag att v_R, w_G är sanna och att v_G, v_B, w_R, w_B är falska. Om vi bortser från hjälpvariablerna a_e, b_e, c_e så ser man att

$$\underbrace{(\neg v_R \vee \neg w_R \vee a_e)}_{\text{satisfierad}} \wedge \underbrace{(\neg v_G \vee \neg w_G \vee b_e)}_{\text{satisfierad}} \wedge \underbrace{(\neg v_B \vee \neg w_B \vee c_e)}_{\text{ej satisfierad}} \wedge (a_e \vee b_e \vee c_e).$$

Om nu a_e och b_e sätts till falsk och c_e till sann får vi

$$\underbrace{(\neg v_R \vee \neg w_R \vee a_e)}_{\text{satisfierad}} \wedge \underbrace{(\neg v_G \vee \neg w_G \vee b_e)}_{\text{satisfierad}} \wedge \underbrace{(\neg v_B \vee \neg w_B \vee c_e)}_{\text{satisfierad}} \wedge \underbrace{(a_e \vee b_e \vee c_e)}_{\text{satisfierad}}.$$

Slutsats: Om två färgvariabler (exempelvis v_R och w_R) samtidigt är sanna kan klausulerna inte satisfieras. I alla andra fall kan de fyra klausulerna satisfieras genom att sätta en av bågens hjälpvariabler a_e, b_e, c_e till sann. Vi har därmed verifierat att G är 3-färgbar om och endast om den resulterande formeln har en tilldelning som gör exakt en literal i varje klausul sann. Det följer att problemet är NP-fullständigt.