

Fö. 6: Komplexitetsteori och NP-fullständighet I.

Fö. 7: Komplexitetsteori och NP-fullständighet II.

Fö. 8: Algoritmer för NP-fullständiga problem.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Fö. 6+7

- Grundläggande begrepp.
- Översikt över komplexitetsteori.
- Polynomiska reduktioner.
- NP-fullständighet.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Syfte: Demonstrera en klass (intressanta) problem som (troligen) inte kan lösas i polynomisk tid.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

P är klassen av problem som är lösbara i polynomisk tid.

NP är klassen av problem vars lösningar kan verifieras i polynomisk tid.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Låt X och Y vara beslutsproblem med instansmängderna I_X och I_Y .

Det finns en *polynomisk reduktion* från X till Y om följande gäller.

Det existerar en algoritm A som avbildar I_X på I_Y med följande egenskaper:

- 1 A går i polynomisk tid,
- 2 om $I \in I_X$ är en "ja"-instans så är $A(I)$ en "ja"-instans till problemet Y och
- 3 om $I \in I_X$ är en "nej"-instans så är $A(I)$ en "nej"-instans till problemet Y .

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Om X är **NP**-svårt och det finns en polynomisk reduktion från X till Y så är Y ett **NP**-svårt problem.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Om X är **NP**-svårt och det finns en polynomisk reduktion från X till Y så är Y ett **NP**-svårt problem.

Om Y är **NP**-svårt och en medlem i **NP** så är Y ett **NP**-fullständigt problem.

Komplexitetsteori och NP-fullständighet.

Dagens exempel.

Max 2SAT

Oberoende Mängd

Nodhölje

3-Färgning

Max 2SAT

Max 2SAT

Problem. Max 2SAT

Indata. Ett heltal K och en CNF-formel $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$ där varje klausul C_i innehåller högst två literaler.

Fråga. Existerar en tilldelning av sanningsvärden sådan att minst K eller flera klausuler i F blir satisfierade?

Max 2SAT

Reduktion från 3SAT.

Max 2SAT

Betrakta följande klausuler.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Max 2SAT

Antag att $x = y = z = 0$. Välj $w = 0$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 6 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = y = z = 0$. Välj $w = 1$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 4 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = 1$ och $y = z = 0$. Välj $w = 0$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 7 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = 1$ och $y = z = 0$. Välj $w = 1$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 6 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = 0$ och $y = z = 1$. Välj $w = 0$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 7 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = 0$ och $y = z = 1$. Välj $w = 1$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 7 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = y = z = 1$. Välj $w = 0$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 6 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Antag att $x = y = z = 1$. Välj $w = 1$.

$$(x), (y), (z), (w),$$

$$(\neg x \vee \neg y), (\neg y \vee \neg z), (\neg z \vee \neg x),$$

$$(x \vee \neg w), (y \vee \neg w), (z \vee \neg w)$$

Summa: 7 satisfierade klausuler.

Max 2SAT

Om $x = y = z = 0$ så kan maximalt 6 klausuler satisfieras.

Max 2SAT

Om $x = y = z = 0$ så kan maximalt 6 klausuler satisfieras.

I alla andra fall kan 7 klausuler satisfieras.

Max 2SAT

Tillbaka till 3SAT.

Max 2SAT

$$(x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee u)$$



Max 2SAT

$$(x) \wedge (\neg y) \wedge (z) \wedge (w_1) \wedge$$

$$(\neg x \vee y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x) \wedge$$

$$(x \vee \neg w_1) \wedge (\neg y \vee \neg w_1) \wedge (z \vee \neg w_1) \wedge$$

$$(x) \wedge (y) \wedge (u) \wedge (w_2) \wedge$$

$$(\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg u) \wedge (\neg u \vee \neg x) \wedge$$

$$(x \vee \neg w_2) \wedge (y \vee \neg w_2) \wedge (u \vee \neg w_2)$$

Max 2SAT

$$K = 7 \cdot \#klausuler$$

Max 2SAT

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

Max 2SAT

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

Slutsats: Max 2SAT är ett **NP**-svårt problem.

Oberoende Mängd

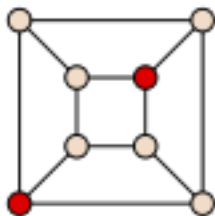
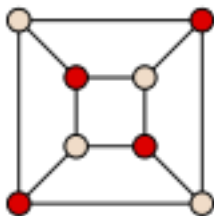
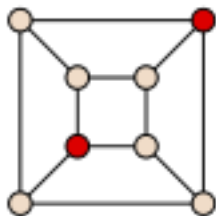
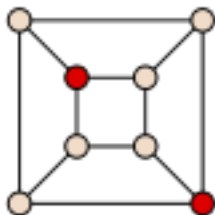
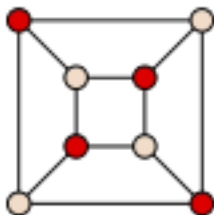
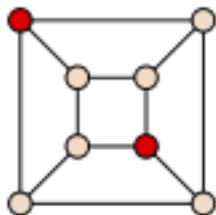
Översikt/komplexitetsteori.

Problem. Oberoende Mängd.

Indata. En graf $G = (V, E)$ och ett heltal K .

Fråga. Innehåller G en oberoende mängd med K eller fler noder?

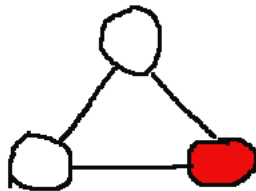
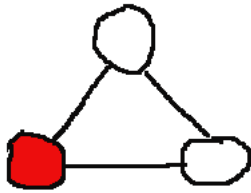
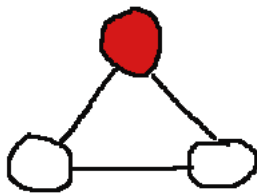
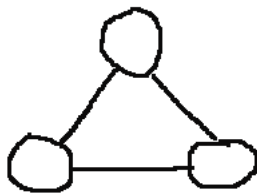
Översikt/komplexitetsteori.



Oberoende Mängd

Reduktion från 3SAT.

Oberoende mängd

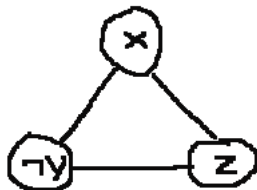


Oberoende Mängd

$$(x \vee \neg y \vee z)$$

Oberoende Mängd

$$(x \vee \neg y \vee z)$$

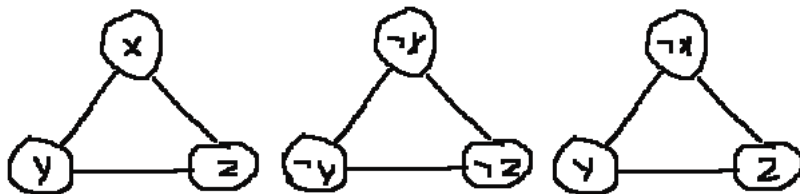


Oberoende Mängd

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$

Oberoende Mängd

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$

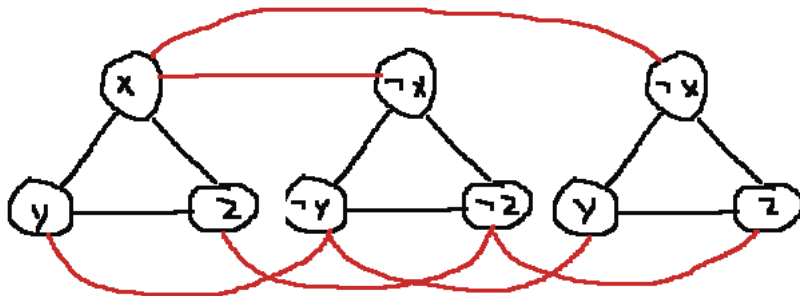


Oberoende mängd

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$

Oberoende mängd

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z)$$



$$K = 3$$

Oberoende mängd

Antag att det finns en oberoende mängd av storlek $\#$ klausuler. Om en nod märkt x är vald så sätt $f(x) = 1$. Om en nod märkt $\neg x$ är vald så sätt $f(x) = 0$. Notera att konflikt inte kan uppstå: en nod märkt x kan aldrig väljas tillsammans med en nod märkt $\neg x$ p.g.a. de "röda" bågarna. Notera att varje klausul kommer att innehålla minst en sann literal under tilldelningen f . Alltså är formeln satisfierbar.

Oberoende mängd

Antag att formeln är satisfierad av tilldelningen f . För varje "svart" triangel i grafen är minst en nod sann under f . Välj godtyckligt en sådan nod ur varje "svart" triangel och lägg dessa i mängden M . Mängden M innehåller $\#klausuler$ noder. Antag att det finns en båge mellan två noder i M . Detta måste i så fall vara en "röd" båge. Det leder till motsägelse eftersom f inte kan göra både x och $\neg x$ sann samtidigt. Alltså är M en oberoende mängd av storlek $\#klausuler$.

Oberoende Mängd

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

Oberoende Mängd

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

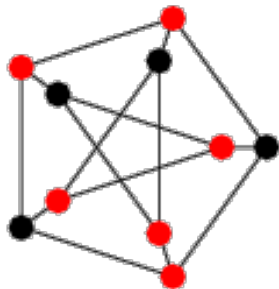
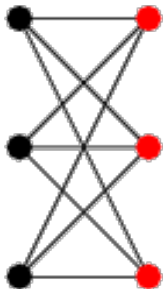
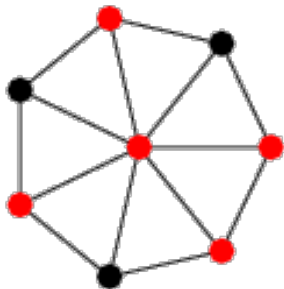
Slutsats: Oberoende Mängd är ett **NP**-svårt problem.

Nodhölje

Nodhölje

Ett *nodhölje* i en oriktad graf $G = (V, E)$ är en delmängd $V' \subseteq V$ sådan att varje båge i E är ansluten till minst en nod i V' .

Nodhölje



Nodhölje

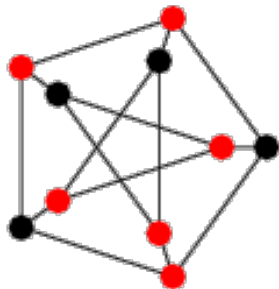
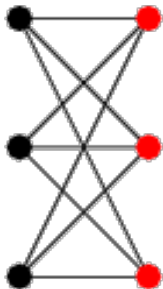
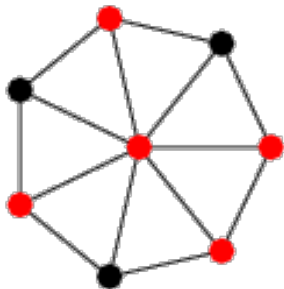
Problem. Nodhölje.

Indata. Oriktad graf $G = (V, E)$ och ett heltal $K \geq 0$.

Utdata. Nodhölje $V' \subseteq V$ sådant att $|V'| \leq K$.

Reduktion från Oberoende Mängd.

Nodhölje



Nodhölje

En graf $G = (V, E)$ innehåller ett nodhölje av storlek K om och endast om G innehåller en oberoende mängd av storlek $|V| - K$.

Nodhölje

En instans $((V, E), K)$ av Oberoende Mängd.



En instans $((V, E), |V| - K)$ av Nodhölje.

Om instansen av Oberoende Mängd är en "ja"-instans så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om instansen av Oberoende Mängd är en "nej"-instans så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

Nodhölje

Om instansen av Oberoende Mängd är en "ja"-instans så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om instansen av Oberoende Mängd är en "nej"-instans så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

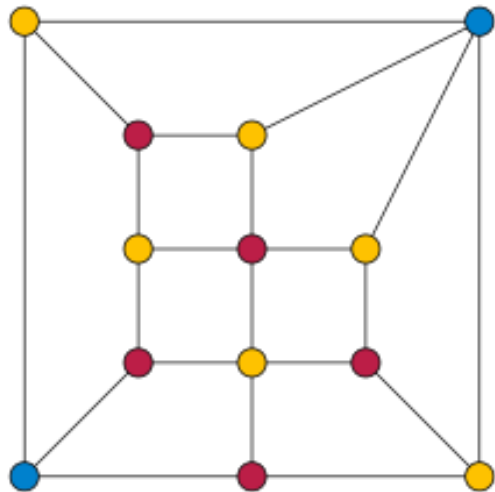
Slutsats: Nodhölje är ett **NP**-svårt problem.

3-Färgning

3-Färgning

En *k-färgning* av en oriktad graf $G = (V, E)$ är en funktion $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ sådan att för varje båge $\{v, w\} \in E$ så gäller $f(v) \neq f(w)$.

3-Färgning



3-Färgning

Problem. 3-Färgning.

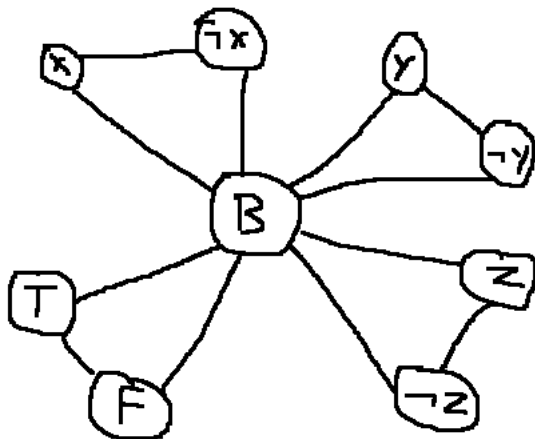
Indata. Oriktad graf $G = (V, E)$.

Fråga. Är G 3-färgbar?

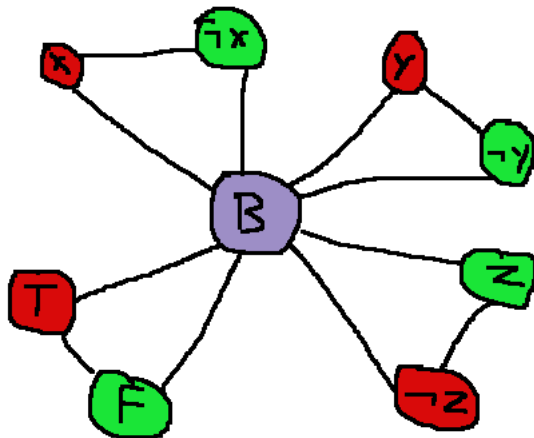
Oberoende Mängd

Reduktion från 3SAT.

3-Färgning



3-Färgning

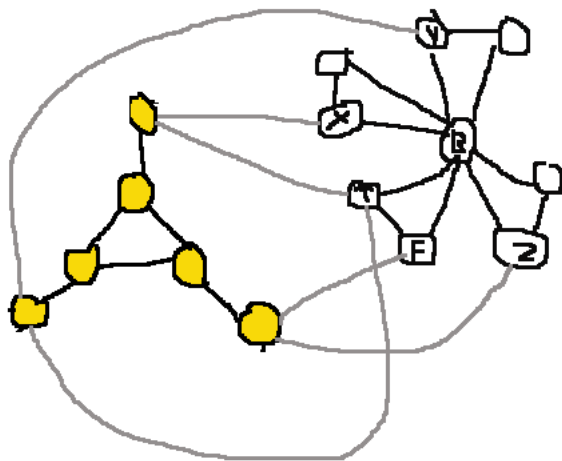


3-Färgning

$$(x \vee y \vee \neg z)$$

$\Downarrow$

3-Färgning



3-Färgning

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

3-Färgning

Om 3SAT-formeln är satisfierbar så är den nya instansen en "ja"-instans.

Om 3SAT-formeln inte är satisfierbar så är den nya instansen en "nej"-instans.

Transformationen kan utföras i polynomisk tid.

Slutsats: 3-Färgning är ett **NP**-svårt problem.