Lösningsförslag 3

Uppgift 1.

Notera först att problemet är i NP: certifikatet är helt enkelt mängden $\mathcal{C}'$, och att testa de två villkoren $|\mathcal{C}'| \leq K$ och $\bigcup \mathcal{C}' = S$ kan göras i polynomisk tid.

För att visa att problemet är NP-svårt så gör vi en polynomisk reduktion från nodhöljesproblemet. Låt $G = (V, E)$ vara en oriktad graf och K ett heltal. Vi antar för enkelhets skull att $V = \{1, \ldots, n\}$. Låt e_v vara mängden av bågar i G som är anslutna till noden v.

Bilda instansen $(E, \mathcal{C}, K)$ av uppgiftens problem där

$$\mathcal{C} = \{e_v \mid v \in V\}.$$

Notera att $(E, \mathcal{C}, K)$ kan beräknas i polynomisk tid. Vi visar nu att grafen G innehåller ett nodhölje av storlek $\leq K$ om och endast om instansen $(E, \mathcal{C}, K)$ har en lösning.

Antag att det finns ett nodhölje $H = \{i_1, \ldots, i_p\}$ i G av storlek $\leq K$. Vi visar att $\mathcal{C}' = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\}$ är en lösning till instansen $(E, \mathcal{C}, K)$. Vi vet att $|\mathcal{C}'| \leq K$ så det räcker att visa att $\bigcup \mathcal{C}' = E$. Antag att det finns en båge $e \in E$ som inte finns i $\bigcup \mathcal{C}'$. Det betyder att e inte är medlem i någon av mängderna $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$. Det betyder i sin tur att $e \cap H = \emptyset$ vilket leder till en motsägelse eftersom H är ett nodhölje till grafen G. Alltså gäller $\bigcup \mathcal{C}' = E$.

Antag att det finns en delmängd $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\} = \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ med storlek $\leq K$ och $\bigcup \mathcal{C}' = E$. Vi visar att $H = \{i_1, \ldots, i_p\}$ är ett nodhölje till G. Välj en godtycklig båge $e \in E$. Eftersom $\bigcup \mathcal{C}' = E$ så finns bågen e i någon av mängderna $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$. Vi antar att $e \in e_{i_j}$. Detta innebär att $e = \{i_j, i_k\}$ för något i_k per definition av e_{i_j}, och att e täcks av H. Eftersom e är en godtyckligt vald båge täcks alla bågar av H.

Uppgift 2.

Fullständigt bevis finns i kursboken.

Uppgift 3.

Medlemskap i NP är lätt att visa. För att visa NP-svårhet så reducerar vi Subset Sum till Knapsack. Låt (S, t) vara en godtycklig instans av Subset Sum med $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$. Introducera objekt $O_1, \ldots, O_k$ och låt O_i, $1 \leq i \leq k$, ha vikt $a_i = s_i$ och värde $v_i = s_i$. Låt $B = K = t$.

Antag att instansen av Subset Sum är en ja-instans. Då finns en delmängd $S' = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_p}\} \subseteq S$ som summerar till t. Notera nu att

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i_j} = t \text{ och } \sum_{j=1}^{p} v_{i_j} = t$$

så instansen vi konstruerat är en ja-instans.

Antag istället att instansen av Knapsack som vi konstruerat är en ja-instans och har lösningen $\{O_{i_1}, \ldots, O_{i_q}\}$. Låt lösningen till Subset Sum vara $S' = \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_q}\}$. Då vet vi att

$$\sum_{j=1}^{q} a_{i_j} \leq t \text{ och } \sum_{j=1}^{q} v_{i_j} \geq t.$$

samt att

$$\sum_{j=1}^{q} s_{i_j} \leq t \text{ och } \sum_{j=1}^{q} s_{i_j} \geq t.$$

Vi kan då dra slutsatsen att

$$\sum_{j=1}^{q} s_{i_j} = t$$

och att instansen av Subset Sum är en ja-instans.

Uppgift 4.

Deterministisk lösning. Antag att $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Bilda funktionerna $f_1, f_2 : V \to \mathbb{N}$ enligt

$$f_1(v_i) = i$$

$$f_2(v_i) = k - i.$$

Låt a_1 vara antalet villkor som satisfieras av f_1 och a_2 antalet villkor som satisfieras av f_2. Varje villkor $(v_i < v_j) \in C$ satisfieras av exakt en av funktionerna f_1 och f_2. Detta gör att $a_2 = |C| - a_1$ så någon av a_1 och a_2 är större än eller lika med $|C|/2$. Konstruktionen av f_1, f_2 och de erforderliga testerna kan enkelt utföras i polynomisk tid.

Randomiserad lösning. Antag att $V = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Låt $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ vara en slumpmässigt vald permutation av $\{1, \ldots, k\}$. Låt $f(v_i) = \sigma(i)$.

Vi uppskattar hur många villkor som uppfylls av f. Antag att villkoren i C är $c_1, \ldots, c_m$. Låt den stokastiska variabeln $\mathbf{X}_i$ vara 1 om villkoret c_i uppfylls av f, och låt variabeln vara 0 annars. Då är det förväntade antalet satisfierade villkor lika med

$$E(\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_m) = /\text{linearitet}/ = E(\mathbf{X}_1) + \cdots + E(\mathbf{X}_m).$$

Sannolikheten för att ett villkor uppfylls är $1/2$ eftersom σ är en slumpmässigt vald permutation. Eftersom $\mathbf{X}_i$ är en 0/1-variabel följer att $E(\mathbf{X}_i) = 1/2$. Därav följer att $1/2 \cdot |C|$ villkor förväntas vara satisfierade av f.

Problemet med att konstruera en algoritm baserad på idéen ovan är att generera en slumpmässigt vald permutation. Ett enkelt sätt att göra detta är att utnyttja Fisher-Yates algoritm (se Lemma 5.5 i boken eller `https://en.wikipedia.org/wiki/Random_permutation`).

Uppgift 5.

Antag att grafen $G = (V, A)$ innehåller noderna $v_1, \ldots, v_n$. Tilldela varje nod talet 0 med sannolikhet 50% och talet 1 med sannolikhet 50%. Låt V_0 vara mängden av noder som tilldelats 0 och V_1 mängden av noder som tilldelats 1. Vi ser att $V = V_0 \cup V_1$ och att $V_0 \cap V_1 = \emptyset$.

Vi uppskattar nu hur många bågar som startar i V_0 och slutar i V_1. Antag att bågarna i G är $e_1, \ldots, e_m$. Låt den stokastiska variabeln $\mathbf{X}_i$ vara 1 om bågen e_i startar i V_0 och slutar i V_1, och låt variabeln vara 0 annars. Då är det förväntade antalet bågar lika med

$$E(\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_m) = /\text{linearitet}/ = E(\mathbf{X}_1) + \cdots + E(\mathbf{X}_m).$$

Sannolikheten för att en båge startar i V_0 och slutar i V_1 är $1/4$. Eftersom $\mathbf{X}_i$ är en 0/1-variabel följer att $E(\mathbf{X}_i) = 1/4$. Därav följer att $1/4 \cdot |A|$ bågar förväntas starta i V_0 och sluta i V_1.