

Induktionsbevis

- Visa att en egenskap $P(n)$ gäller för alla naturliga tal $n = 0, 1, 2, \dots$.
- Bassteg. Visa att $P(0)$ gäller.
- Induktionsantagande. Antag att $P(k)$ gäller.
- Induktionssteg. Visa att om $P(k)$ gäller så gäller $P(k + 1)$.

Induktionsbevis

- Visa att en egenskap $P(n)$ gäller för alla naturliga tal $n = 0, 1, 2, \dots$.
- Bassteg. Visa att $P(0)$ gäller.
- Induktionsantagande. Antag att $P(k)$ gäller.
- Induktionssteg. Visa att om $P(k)$ gäller så gäller $P(k + 1)$.

Induktionsbevis

- Visa att en egenskap $P(n)$ gäller för alla naturliga tal $n = 0, 1, 2, \dots$.
- Bassteg. Visa att $P(0)$ gäller.
- Induktionsantagande. Antag att $P(k)$ gäller.
- Induktionssteg. Visa att om $P(k)$ gäller så gäller $P(k + 1)$.

Induktionsbevis

- Visa att en egenskap $P(n)$ gäller för alla naturliga tal $n = 0, 1, 2, \dots$.
- Bassteg. Visa att $P(0)$ gäller.
- Induktionsantagande. Antag att $P(k)$ gäller.
- Induktionssteg. Visa att om $P(k)$ gäller så gäller $P(k + 1)$.

Induktionsbevis

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Bassteg. $\sum_{i=1}^0 i = 0$ och $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.
- Induktionsantagande. Antag att likheten gäller för något godtyckligt k .
- Induktionssteg.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = / \text{ ind. ant. } / =$$

$$(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktionsbevis

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Bassteg. $\sum_{i=1}^0 i = 0$ och $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.
- Induktionsantagande. Antag att likheten gäller för något godtyckligt k .
- Induktionssteg.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = / \text{ ind. ant. } / =$$

$$(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktionsbevis

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Bassteg. $\sum_{i=1}^0 i = 0$ och $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.
- Induktionsantagande. Antag att likheten gäller för något godtyckligt k .
- Induktionssteg.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = / \text{ ind. ant. } / =$$

$$(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktionsbevis

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Bassteg. $\sum_{i=1}^0 i = 0$ och $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.
- Induktionsantagande. Antag att likheten gäller för något godtyckligt k .
- Induktionssteg.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = / \text{ ind. ant. } / =$$

$$(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Induktionsbevis

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Bassteg. $\sum_{i=1}^0 i = 0$ och $\frac{0 \cdot (0+1)}{2} = 0$.
- Induktionsantagande. Antag att likheten gäller för något godtyckligt k .
- Induktionssteg.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = (k+1) + \sum_{i=1}^k i = / \text{ ind. ant. } / =$$

$$(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Motsägelsebevis

- Visa att en egenskap P gäller.
- Visa att om $\neg P$ gäller så leder detta till en logisk motsägelse.

Motsägelsebevis

- Visa att en egenskap P gäller.
- Visa att om $\neg P$ gäller så leder detta till en logisk motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Motsägelsebevis

Visa att

$$x^2 - y^2 = 1$$

saknar heltalslösningar $x, y > 0$.

Antag att $x, y > 0$ har denna egenskap.

$$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = 1$$

I. $(x + y) = (x - y) = 1 \Rightarrow x = 1, y = 0$. Motsägelse.

II. $(x + y) = (x - y) = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0$. Motsägelse.

Algoritmkomplexitet

```
for  $i = 1$  to  $n$  do  
  for  $j = 1$  to  $n$  do  
    for  $k = 1$  to  $n$  do  
      beräkna något
```

Mergesort.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/2) + cn$$

$$T(n) \in O(n \log n)$$

Rekursiva ekvationer av typen

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

har kända lösningar (*Master Theorem*, kap. 4.3 i kursboken).

Rekursiva ekvationer av typen

$$T(n) = \sum_{i=1}^k T(n - r_i) + \text{poly}(n)$$

for naturliga tal $r_1, \dots, r_k$, $k \geq 2$, har kända lösningar.

Exempel: $T(1) = 1$, $T(2) = 1$, $T(n) = T(n-1) + T(n-2)$.

$T(n) \in O(1.6180^n)$.

$$T(n) = \sum_{i=1}^k T(n - r_i) + \text{poly}(n)$$

Låt $f(x) = 1 - \sum_{i=1}^k x^{-r_i}$.

Hitta största reella nollstället c till f .

$T(n) \in O(c^n)$.

Rekursiva ekvationer av typen

$$T(n) = T(n - 1) + n^d$$

har lösningen $T(n) \in O(n^{d+1})$.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.

Propositionslogik

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

- Variabler: p, q, r, s .
- Operatorer: $\wedge$ (och), $\vee$ (eller), $\neg$ (inte).
- Literaler: $p, q, r, s, \neg p, \neg q, \neg r, \neg s$.
- Konjunktiv normalform (CNF).
- Tilldelning: Funktion från variabler till $\{0, 1\}$.
- Satisfierbar formel.