# Föreläsning 4

## Träd: grundläggande begrepp, ADT, datastrukturer, binära sökträd

TDDC91,TDDE22,725G97: DALG

Utskriftsversion av föreläsning i *Datastrukturer och algoritmer* 13 september 2018

Magnus Nielsen, IDA, Linköpings universitet

4.1

## Innehåll

## Innehåll

4.2

# 1 Grundläggande begrepp

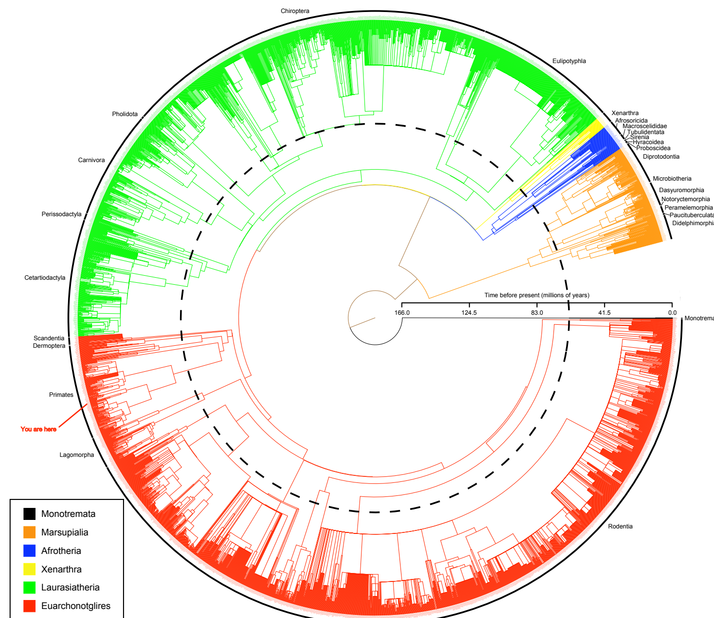
## Varför träd?

Trädstrukturer uppkommer naturligt i många situationer

- Filsystem
- Hierarkiska klassifikationssystem
- Beslutsträd
- Hierarkisk organisation av
  - Organisationer: avdelning, område, grupp
  - Dokument: bok, kapitel, sektion
  - XML-dokument
- För att representera ordning eller prioritet

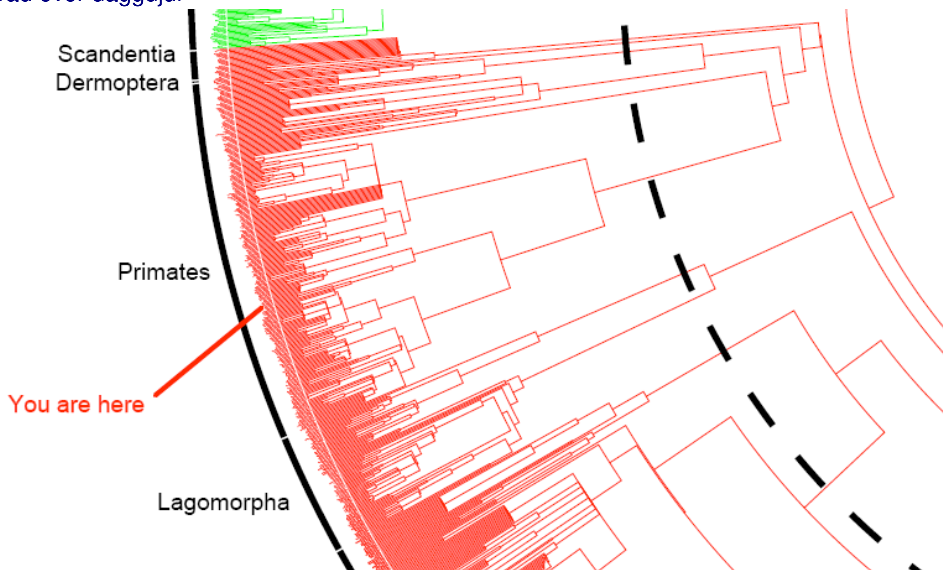
4.3

## Ett superträd över däggdjur




4.4

## Ett superträd över däggdjur




4.5

## Ett superträd över däggdjur

4.6

## Terminologi

- Ett *(rotat) träd* $T = (V, E)$ består av en mängd $V$ av *noder* och *kanter* $E$, där en kant är ett par $(u, v) \in V \times V$.
- Noder (ibland kallade *hörn*) $v \in V$ lagrar data i ett *förälder-barn*förhållande.
- Ett förälder-barnförhållande mellan noderna $u$ och $v$ visas som en riktad kant $(u, v) \in E$, där riktningen är från $u$ till $v$.
- Varje nod har som mest en föräldranod; kan ha många *syskon*.
- Det finns högst en nod utan förälder – *rotnoden*.

4.7

## Mer terminologi

- En nods *grad* är antalet barn noden har.
- En nod med 0 barn är ett *löv* eller en *yttre/extern* nod. Övriga noder är *inre/interna*.
- En stig är en sekvens av noder $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, där $k > 0$ sådan att $v_i, v_{i+1}$ är en kant för $i = 1, \ldots, k-1$.
- Längden av stigen $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ är $k-1$. Notera att längden av stigen $(v_1)$ är 0.
- En nod $n$ är en *förfader* till en nod $v$ omm det finns en stig från $n$ till $v$ i $T$.
- En nod $n$ är en *ättling* till en nod $v$ omm det finns en stig från $v$ till $n$ i $T$.

4.8

### Ännu mer terminologi

- *Djupet* $d(v)$ av en nod $v$ är längden av stigen från rotnoden till $v$.
- *Höjden* $h(v)$ av en nod $v$ är längden av den längsta stigen från $v$ till någon ättling till $v$.
- *Höjden* $h(T)$ av ett träd $T$ är höjden av rotnoden.

4.9

### Några olika trädtyper

- *Ordnat träd*: linjär ordning mellan varje nods barn
- *Binärt träd*: ordnat träd med grad$\leq$ 2 för varje nod. En nod kan ha ett vänsterbarn och ett högerbarn
- *Tomt binärt träd*(**null**): binärt träd utan noder
- *Fullt binärt träd*: icke-tomt; graden är antingen 0 eller 2 för varje nod. Följd: antalet löv = 1 + antalet interna noder
- *Perfekt binärt träd*: fullt binärt träd, alla löv har samma djup. Följd: antalet löv = $2^h$ för ett perfekt binärt träd av höjd $h$
- *Komplett binärt träd*: approximation till perfekt träd för $2^h \leq n < 2^{h+1} - 1$. På avstånd $h - 1$ från rotnoden är alla interna noder till vänster om de externa noderna och det finns som mest en nod med ett barn, vilket måste vara ett vänsterbarn.

4.10

## 2 ADT träd

### Operationer på en nod $v$ i ett träd $T$

- *parent*$(v)$ returnerar föräldern till $v$, **error** om $v$ är rotnoden
- *children*$(v)$ returnerar samling av barn till $v$
- *firstChild*$(v)$ returnerar första barnet till $v$ eller **null** om $v$ är ett löv
- *rightSibling*$(v)$ returnerar högra syskonet till $v$ eller **null** om det inte finns
- *leftSibling*$(v)$ returnerar vänstra syskonet till $v$ eller **null** om det inte finns
- *isLeaf*$(v)$ returnerar **true** omm $v$ är ett löv
- *isInternal*$(v)$ returnerar **true** omm $v$ inte är en lövnod
- *isRoot*$(v)$ returnerar **true** omm $v$ är rotnoden
- *depth*$(v)$ returnerar djupet av $v$ i $T$
- *height*$(v)$ returnerar höjden av $v$ i $T$

4.11

### Operationer på ett helt träd $T$

- *size*() returnerar antalet noder i $T$
- *root*() returnerar rotnoden i $T$
- *height*() returnerar höjden av $T$

**Och dessutom för *ett binärt träd***

- *left*$(v)$ returnerar vänstra barnet till $v$ eller **error**
- *right*$(v)$ returnerar högra barnet till $v$ eller **error**
- *hasLeft*$(v)$ testar om $v$ har ett vänstra barn
- *hasRight*$(v)$ testar om $v$ har ett högra barn

4.12

## 3 Representation av binära träd

### En länkad representation

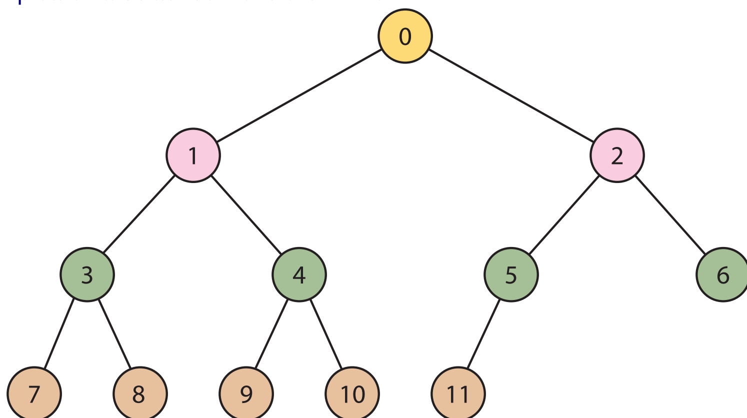
class treeNode<T> *nodeInfo*: T *N*: integer *children*: array[1..*N*] of treeNode<T>

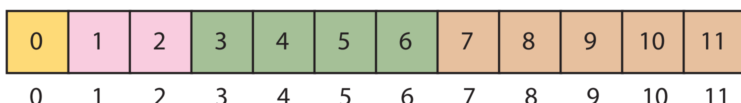
Eller för binära träd

class treeNode<T> *nodeInfo*: T *leftChild*: treeNode<T> *rightChild*: treeNode<T>

4.13

### Komplett binärt träd: sekvensiellt minne



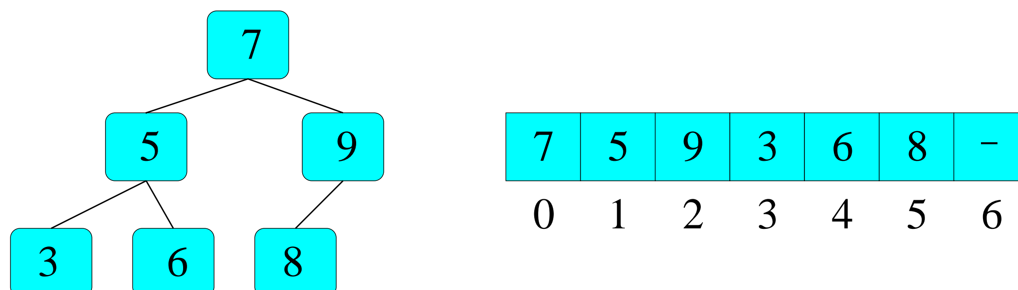

4.14

### Sekvensiellt minne

Använd en table<key,info>[0..n-1]

- leftChild$(i) = 2i+1$ (returnera **null** om $2i+1 \geq n$)
- rightChild$(i) = 2i+2$ (returnera **null** om $2i+2 \geq n$)
- isLeaf$(i) = (i < n)$ and $(2i+1 > n)$
- leftSibling$(i) = i-1$ (returnera **null** om $i = 0$ eller odd$(i)$)
- rightSibling$(i) = i+1$ (returnera **null** om $i = n-1$ eller even$(i)$)
- parent$(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor$ (returnera **null** om $i = 0$)
- isRoot$(i) = (i = 0)$

4.15



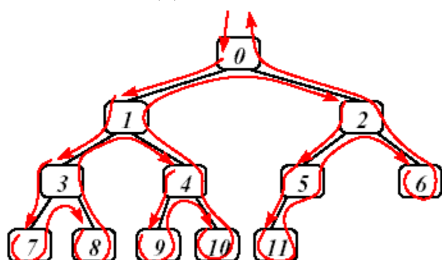

## 4 Trädtraversering

### Traversering av träd

Betrakta ett träd $T$ som om det vore en byggnad: noderna som rum, kanter som dörrar, rotnoden som ingång Hur utforskar man en okänd (cykelfri) labyrint och tar sig ut igen? *Se till att alltid ha en vägg på höger sida!*

Generisk rutin för trädtraversering:

**procedure** VISIT(node $v$)
  **for all** $u \in$CHILDREN$(v)$ **do**
    VISIT$(u)$



Anropa visit($root(T)$) och varje nod i $T$ kommer att besökas exakt en gång!

4.16

### Traversering av träd

**procedure** PREORDERVISIT(node $v$)
  DOSOMETHING($v$) ▷ före ev. barn
  **for all** $u \in$ CHILDREN($v$) **do**
    PREORDERVISIT($u$)

**procedure** POSTORDERVISIT(node $v$)
  **for all** $u \in$ CHILDREN($v$) **do**
    POSTORDERVISIT($u$)
  DOSOMETHING($v$) ▷ efter alla barn

4.17

### Traversering av träd (enbart binära träd)

**procedure** INORDERVISIT(node $v$)
  INORDERVISIT(LEFTCHILD($v$))
  DOSOMETHING($v$) ▷ efter alla vänsterättlingar
  INORDERVISIT(RIGHTCHILD($v$))

4.18

### Traversering av träd

**procedure** LEVELORDERVISIT(node $v$)
  $Q \leftarrow$ MAKEEMPTYQUEUE()
  ENQUEUE($v, Q$)
  **while not** ISEMPTY($Q$) **do**
    $v \leftarrow$ DEQUEUE($Q$)
    DOSOMETHING($v$)
    **for all** $u \in$ CHILDREN($v$) **do**
      ENQUEUE($u, Q$)

Även känd som bredden först.

4.19

## 5 Binära sökträd

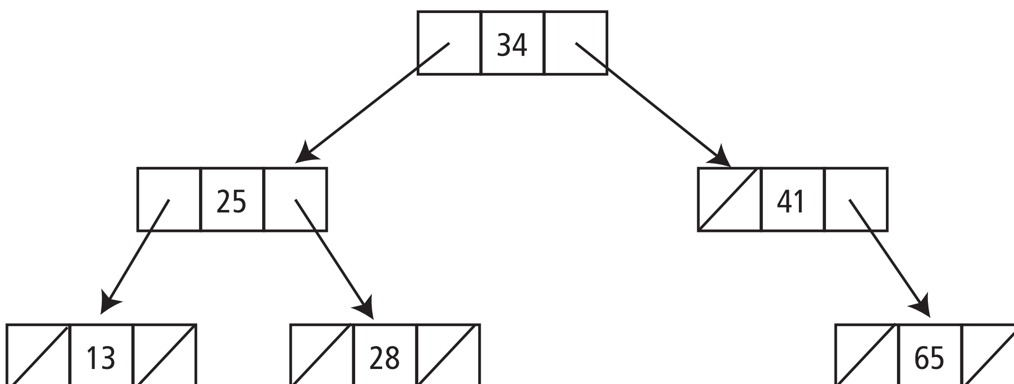
### Binära sökträd

Ett *binärt sökträd* (BST) är ett binärt träd sådant att:

- informationen associerad med en nod är linjärt ordnad t.ex. (nyckel,värde).

Nyckeln i varje nod är:

- större än (eller lika med) nyckeln hos alla vänsterättlingar, och
- mindre än (eller lika med) nyckeln hos alla högerättlingar.

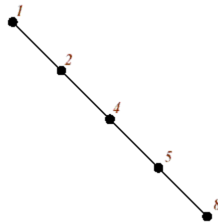



4.20

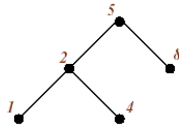
### Binära sökträd är inte unika

Samma data kan generera olika binära sökträd

insert: 1,2,4,5,8




insert: 5,2,1,4,8




4.21

## Lyckad uppslagning

**BST i värsta fallet**

- BST degenererat till linjär sekvens
- förväntat antal jämförelser är $(n+1)/2$

**Balanserat BST**

- djupet av löven skiljer sig inte med mer än 1
- $O(\log_2 n)$ jämförelser

4.22

## Alltså — Låt oss hålla dem balanserade!

Några vanligt förekommande balanserade träd:

- AVL-träd
- (2,3)-träd, (a,b)-träd,
- ...Röd-Svarta träd, B-träd
- Splay-träd

4.23