

Kapitel 6

Rekursion, induktion och ordning

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

6.1. Vi visar detta med hjälp av induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $2^n < n!$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n > 3$.

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 4$. Då gäller att $2^4 = 16 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$
- Induktionssteget: Anta att $P(k)$ är sant för något $k > 3$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1)$ är sant. Vi använder oss av induktionsantagandet att $2^k < k!$:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n > 3$.

6.2. Vi visar detta med hjälp av induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $n^2 < 2^n$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n > 4$.

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 5$. Då gäller att $n^2 = 5 \cdot 5 = 25 < 32 = 2^5$
- Induktionssteget: Anta att $P(k)$ är sant för något $k > 4$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1)$ är sant. Vi använder oss av att $k > 4$ samt induktionsantagandet att $k^2 < 2^k$:

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < k^2 + 2k + k = k^2 + 3k < k^2 + k \cdot k = 2k^2 < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n > 4$.

6.3. Vi visar detta med hjälp av induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att n kan skrivas $n = 2a + 5b$ där $a, b \in \mathbb{N}$

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 2, 4, 5, 6$:

$$2 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0$$

$$4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$$

$$5 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0$$

- Induktionssteget: Anta att $P(k)$ är sant för något $k \geq 6$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1)$ är sant. Vi börjar med att skriva om $k+1$ enligt induktionsantagandet där a och b är icke-negativa heltal.

$$k+1 = 2a + 5b + 1 \tag{6.1}$$

Det finns två fall. Antingen är $b = 0$ eller så är $b > 0$. Vi börjar med att anta $b = 0$, vilket måste innebära att $a \geq 3$. Alltså kan vi skriva

$$k+1 = 2a + 5b + 1 = 2a + 1 = 2(a-2) + 4 + 1 = 2(a-2) + 5 \tag{6.2}$$

där $(a-2) \geq 1$. Om $b > 0$ gäller:

$$k+1 = 2a + 5b + 1 = 2a + 5(b-1) + 5 + 1 = 2a + 5(b-1) + 6 = 2(3+a) + 5(b-1) \tag{6.3}$$

där $(b-1) \geq 0$.

I båda fallen kunde $k + 1$ skrivas på formen $k + 1 = 2a + 5b$ där $a, b \in \mathbf{N}$. Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla $n \in \mathbf{Z}^+$ där $n \neq 1, 3$

6.4. Först räknar vi ut de första talen i serien

- $a_0 = 0$
- $a_1 = 1$
- $a_2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 2 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 3 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 3 + 5 = 8$
- $a_7 = a_6 + a_5 = 5 + 8 = 13$

Vilket kanske känns igen som Fibonacci-sekvensen.

Vi visar påståendet med induktion. Det går att använda starka induktionsprincipen, men det går även med den vanliga formen vilket vi gör här. Låt $P(n)$ vara påståendet att $a_m < (7/4)^m$ för $m = n - 1$ och $m = n$.

- Bassteget: Vi visar först att $P(1)$ och $P(2)$ gäller:
 - $a_0 = 0 < 1 = (7/4)^0$
 - $a_1 = 1 < 7/4 = (7/4)^1$
 - $a_2 = 1 < 49/16 = (7/4)^2$
- Induktionssteget: Anta att $P(k)$ gäller för något $k \geq 2$, dvs att $a_k < (7/4)^k$ och att $a_{k-1} < (7/4)^{k-1}$. Vi ska då visa att även $P(k+1)$ är sant, vilket reducerar till visa att $a_{k+1} < (7/4)^{k+1}$. Eftersom $k \geq 2$ kan vi skriva a_{k+1} som en summa av dess två föregångare, och använda induktionsantagandet:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} < (7/4)^k + (7/4)^{k-1} = (7/4)^k + (7/4)^k(4/7) = \\ &= (1 + 4/7)(7/4)^k = (11/7)(7/4)^k = \\ &= (44/28)(49/28)^k < (49/28)(49/28)^k = (7/4)^{k+1} \end{aligned}$$

De två stegen tillsammans med induktionsprincipen ger att $a_n < (7/4)^n$ för alla $n \geq 0$.

6.5. Vi konstaterat först att E innehåller alla jämna tal: $E = \{0, 2, 4, \dots\}$. Låt $f(n) = 2n$. Vi visar att f är en bijektion, genom att visa att f är injektiv och surjektiv:

- Injektiv: om $n \neq m$ så gäller $f(n) = 2n \neq 2m = f(m)$.
- Surjektiv: Låt n vara godtyckligt tal i E . Vi vet av definitionen av E att det då finns ett tal $m = n/2 \in \mathbf{N}$. Men $f(m) = 2m = 2(n/2) = n$. Alltså är f surjektiv.

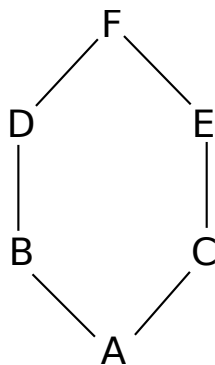
6.6. Det finns inget lösningsförslag för denna uppgift.

6.7. Låt $A = \{A, B, C, D, E, F\}$.

(a) Exempel på en partialordning är det reflexiva och transitiva höljet av

$$\{(A, B), (A, C), (B, D), (C, E), (D, F), (E, F)\}.$$

Det blir alltså, $\{(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (B, B), (B, D), (B, F), (C, C), (C, E), (C, F), (D, D), (D, F), (E, E), (E, F), (F, F)\}$



(b)

- (c) Ja, detta gäller för alla partialordningar, ty om R är reflexiv är även R^{-1} reflexiv (trivialt), om R är transitiv så är även dess invers transitiv (god övning att visa detta), och om R är anti-symmetrisk så är dess invers också det.
- (d) Eftersom R är transitiv och reflexiv så gäller att $R^2 = R$, alltså är R^2 en partialordning.
- (e) Ja, vi kan till exempel ta bort (E, F) från R och fortfarande ha en partialordning. I allmänhet går det att hitta en sådan relation S så länge $R \neq id_A$.
- (f) Ja, vi kan till exempel lägga till (C, D) och fortfarande ha en partialordning. I allmänhet går det att hitta en sådan relation T så länge inte R är en totalordning.

6.8. Vi visar med induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att R^n är symmetrisk om R är symmetrisk.

- Bassteget: Vi visar att $P(0)$ gäller, dvs att R^0 är symmetrisk. Av definitionen följer att $R^0 = id_A$ vilken är symmetrisk eftersom $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- Induktionssteget: Anta $P(k)$ för något $k \geq 0$. Vi ska då visa att $P(k+1)$ gäller, dvs att R^{k+1} är symmetrisk. Om $R^{k+1} = \emptyset$ gäller $P(k+1)$ trivialt, så vi antar att det finns minst ett par i denna relation. Betrakta då godtyckligt par $(a, c) \in R^{k+1} = R \circ R^k$. Då gäller att det finns ett element $b \in A$ sådant att $(a, b) \in R^k$ och $(b, c) \in R$. Av induktionsantagandet vet vi att även $(b, a) \in R^k$ premissen ger att R är symmetrisk så $(c, b) \in R$. Eftersom $(b, a) \in R^k$ och $(c, b) \in R$ gäller att $(c, a) \in R \circ R^k = R^{k+1}$. Vi utgick ifrån ett godtyckligt par $(a, c) \in R^{k+1}$ och kunde finna $(c, a) \in R^{k+1}$, alltså gäller detta för alla par i relationen, vilken således är symmetrisk.

Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer $P(n)$ för alla $n \geq 0$, så R^n är symmetrisk för alla $n \geq 0$ om R är symmetrisk.