

Kapitel 2

Deduktion

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

2.1. (a) Bevis för att $(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$:

- | | | |
|-----|---------------------|-----------------------------------|
| (1) | p | (Premiss) |
| (2) | $(p \rightarrow q)$ | (Premiss) |
| (3) | $\neg p \vee q$ | (2) och Implikationslagen |
| (4) | $\neg(\neg p)$ | (1) och dubbel negation |
| (5) | q | (3), (4) och disjunktiv syllogism |

(b) Vi gör beviset i två steg. Först $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$:

- | | | |
|------|---|----------------------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | (Premiss) |
| (2) | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | (1) och Ekvivalenslagen |
| (3) | $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ | (2) och Implikationslagen |
| (4) | $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ | (3) och Implikationslagen |
| (5) | $(\neg p \wedge (\neg q \vee p)) \vee (q \wedge (\neg q \vee p))$ | (4) och Distributiva lagen |
| (6) | $((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p)) \vee (q \wedge (\neg q \vee p))$ | (5) och Distributiva lagen |
| (7) | $((\neg p \wedge \neg q) \vee 0) \vee (q \wedge (\neg q \vee p))$ | (6) och Inversa lagen |
| (8) | $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge (\neg q \vee p))$ | (7) och Identitetslagen |
| (9) | $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$ | (8) och Distributiva lagen |
| (10) | $(\neg p \wedge \neg q) \vee 0 \vee (q \wedge p)$ | (9) och Inversa lagen |
| (11) | $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$ | (10) och Identitetslagen |
| (12) | $(q \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | (11) och Associativitet |

Av steg (1)-(12) framgår att $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Det andra hållet kan göras helt omvänt (det är till och med så att eftersom vi enbart använt ekvivalenssamband så hade vi kunnat använda ekvivalenstecken hela vägen och därigenom ha visat påståendet. Men för övnings skull så gör vi härledningen med deduktion åt andra hållet också på det som känns naturligt: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow p \leftrightarrow q$

- | | | |
|------|--|----------------------------|
| (1) | $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | Premiss |
| (2) | $(\neg p \vee (p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee (p \wedge q))$ | (1) och Distributiva lagen |
| (3) | $(\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee (p \wedge q))$ | (2) och Distributiva lagen |
| (4) | $1 \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee (p \wedge q))$ | (3) och Inversa lagen |
| (5) | $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee (p \wedge q))$ | (4) och Identitetslagen |
| (6) | $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee (p \wedge q))$ | (5) och Implikationslagen |
| (7) | $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)$ | (6) och Distributiva lagen |
| (8) | $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge 1$ | (7) och Distributiva lagen |
| (9) | $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p)$ | (8) och Identitetslagen |
| (10) | $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ | (9) och Implikationslagen |
| (11) | $p \leftrightarrow q$ | (10) och Ekvivalenslagen |

Av steg (1)-(11) följer att $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow p \leftrightarrow q$, vilket tillsammans med del 1 av beviset ger att $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. VSV

2.2. (a) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$:

- | | | |
|-----|-----------------------------------|--|
| (1) | $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ | Premiss |
| (2) | $p \rightarrow q$ | (1) och konjunktiv förenkling |
| (3) | $\neg q$ | (1) och konjunktiv förenkling |
| (4) | p | Hypotes |
| (5) | q | (2), (4) och Modus ponens |
| (6) | $q \wedge \neg q$ | (5), (3) och Konjunktionsregeln |
| (7) | 0 | (6) och Inversa lagen |
| (8) | $\neg p$ | Följer av steg (4)-(7) och Motsägelserregeln |

Steg (1) - (8) ger att $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

(b) $p \wedge \neg p \Rightarrow q$:

- | | | |
|-----|-------------------|--|
| (1) | $p \wedge \neg p$ | Premiss |
| (2) | $\neg q$ | Hypotes |
| (3) | 0 | Följer av (1) och Inversa lagen |
| (4) | q | Följer av steg (2)-(3) och Motsägelserregeln |

Steg (1)-(4) ger att $p \wedge \neg p \Rightarrow q$. VSV.

(c) $(\neg q \vee r) \Rightarrow (p \leftrightarrow p)$, för att göra denna deduktion behövs egentligen inte premissen, utan vi börjar direkt med hypotesen :

- | | | | |
|-----|--|--|-----------------|
| (1) | $\neg(p \leftrightarrow p)$ | Hypotes | |
| (2) | $\neg((p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow p))$ | (1) och ekvivalenslagen | |
| (3) | $\neg(p \rightarrow p)$ | (2) och Idempotens | |
| (4) | $\neg(\neg p \vee p)$ | (3) och Implikationslagen | Av steg (1)-(7) |
| (5) | $\neg 1$ | (4) och Inversa lagen | |
| (6) | 0 | (5) och axiom i satslogiken | |
| (7) | $p \leftrightarrow p$ | Följer av steg (1)-(6) och Motsägelserregeln | |

följer att $(\neg q \vee r) \Rightarrow (p \leftrightarrow p)$.

(d) $((p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow (p \vee p)$,

- | | | |
|-----|---------------------------|--------------------------------|
| (1) | $((p \wedge q) \wedge q)$ | Premiss |
| (2) | $(p \wedge q)$ | (1) och Konjunktiv förenkling |
| (3) | p | (1) och Konjunktiv förenkling |
| (4) | $\neg(p \vee p)$ | Hypotes |
| (5) | $\neg p \wedge \neg p$ | (4) och De Morgans lag |
| (6) | $\neg p$ | (5) och Konjunktiv förenkling |
| (7) | $p \wedge \neg p$ | (3),(6) och Konjunktionsregeln |
| (8) | 0 | (7) och Inversa lagen |
| (9) | $p \vee p$ | (4)-(8) och Motsägelserregeln |

Av steg (1) - (9) följer att $((p \wedge q) \wedge q) \Rightarrow (p \vee p)$. VSV. Obs att vi i detta fall hade kunnat gå enklare fram med disjunktiv förstärkning, men vi använder motsägelserregeln för att träna på att använda den.

(e) $(\neg p \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow p)$. På samma sätt som i b-uppgiften så är premissen onödig eftersom slutatsen är en tautologi. Vi visar detta:

- | | | |
|-----|-------------------------|-------------------------------|
| (1) | $\neg(p \rightarrow p)$ | Hypotes |
| (2) | $\neg(\neg p \vee p)$ | (1) och Implikationslagen |
| (3) | $\neg 1$ | (2) och Inversa lagen |
| (4) | 0 | (3) och axiom i satslogiken |
| (5) | $p \rightarrow p$ | (1)-(4) och Motsägelserregeln |

Av steg (1)-(5) framgår att $(\neg p \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow p)$ VSV.

(f) $((q \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg q$:

- | | | |
|-----|--|-------------------------------|
| (1) | $(q \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ | Premiss |
| (2) | $\neg \neg q$ | Hypotes |
| (3) | $\neg(q \rightarrow q)$ | (1), (2) och Modus tollens |
| (4) | $\neg(\neg q \vee q)$ | (3) och Implikationslagen |
| (5) | $\neg 1$ | (4) och Inversa lagen |
| (6) | 0 | (5) och axiom i satslogiken |
| (7) | $\neg q$ | (2)-(6) och Motsägelserregeln |

Av steg (1)-(7) framgår att $((q \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg q$, VSV.

2.3. (a) Vi gör två formaliseringar av detta. En enkel och en komplicerad:

- Enkel, låt $FH(x)$ vara predikatet som säger att ett objekt har fyra hjul och $B(x)$ vara ett predikat som säger att x är en bil: $\forall x[B(x) \rightarrow FH(x)]$.
- Komplicerat. Låt $H(x, y)$ vara ett predikat som säger att y är ett hjul på fordonet x :
 $\forall x[B(x) \rightarrow \exists y_1, y_2, y_3, y_4[H(x, y_1) \wedge H(x, y_2) \wedge H(x, y_3) \wedge H(x, y_4) \wedge (y_1 \neq y_2) \wedge (y_1 \neq y_3) \wedge (y_1 \neq y_4) \wedge (y_2 \neq y_3) \wedge (y_2 \neq y_4) \wedge (y_3 \neq y_4)]]$

(b) Låt $F(x, y)$ vara ett predikat som säger att x är förälder till y : $\forall x[\neg F(x, x)]$

(c) Låt $B(x)$ vara ett predikat som säger att x är en boll och $S(x)$ vara predikat som säger att x är svart:

$$\forall x[B(x) \rightarrow S(x)] \vee \neg \exists x[B(x) \wedge S(x)]$$

2.4. Vi börjar med att uttrycka egenskapen att inte D och E kan vara 1 samtidigt, dvs att minst en av dem är 0:

$$\neg D \vee \neg E$$

Vidare kan vi uttrycka D och E med hjälp av A, B, C :

$$D = A \wedge C \text{ samt } E = B \wedge \neg C$$

Påståendet som ska visas är alltså att $\neg(A \wedge C) \vee \neg(B \wedge \neg C)$ är en tautologi:

$$1 \Rightarrow \neg(A \wedge C) \vee \neg(B \wedge \neg C)$$

- | | | |
|-----|---|---------------------------------|
| (1) | 1 | Premiss |
| (2) | $\neg C \vee C$ | (1) och Inversa lagen |
| (3) | $\neg A \vee \neg C \vee \neg B \vee C$ | (2) och Disjunktiv förstärkning |
| (4) | $\neg(A \wedge C) \vee \neg B \vee C$ | (3) och De Morgan |
| (5) | $\neg(A \wedge C) \vee \neg(B \wedge \neg C)$ | (4) och De Morgan |

- 2.5. (a) Låt domänen för x och y vara de naturliga talen. För alla x finns då ett tal $y = 0$ sådan att $x + y = x$
- (b) Låt domänen för x och y vara de icke-negativa talen $[0, \infty)$, för alla x finns då ett tal $y = \sqrt{x}$ sådan att $y^2 = x$.
- (c) Eftersom x och y ska vara lika för alla x och y , kan det finnas som mest ett element i domänen. Till exempel kan domänen bestå enbart av talet 1.
- (d) Här kan vi låta x och y ha olika domäner. Låt x ha domänen av alla negativa heltal, och y ha domänen av alla positiva heltal (i båda fallen utesluter vi talet 0).
- (e) Notera ordningen på kvantifierarna. Det finns ett x sådant att för alla y så är $x^2 = y$. Eftersom det enast är ett värde av x så måste domänen för y åter vara av storleken 1. Vi kan låta domänen för y vara talet 1 och domänen för x vara de naturliga talen.