

Kapitel 1

Satslogik

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till mikael.asplund@liu.se.

1.1. Lösningar uppgift 1

(a) Sanningtabell för $(r \wedge p)$

p	r	$(r \wedge p)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) Sanningtabell för $(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$

p	q	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$	$(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

(c) Sanningtabell för $((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q$

p	q	$\neg q$	$(q \rightarrow q)$	$((q \rightarrow q) \rightarrow p)$	$((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0

(d) Sanningtabell för $((r \leftrightarrow r) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \wedge (r \rightarrow q))$

p	q	r	$(r \rightarrow q)$	$(p \wedge (r \rightarrow q))$	$(r \leftrightarrow r)$	$((r \leftrightarrow r) \leftrightarrow p)$	$((r \leftrightarrow r) \leftrightarrow p) \rightarrow (p \wedge (r \rightarrow q))$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(e) Sanningtabell för $((\neg r \rightarrow (q \wedge p)) \leftrightarrow p)$

p	q	r	$(q \wedge p)$	$\neg r$	$(\neg r \rightarrow (q \wedge p))$	$((\neg r \rightarrow (q \wedge p)) \leftrightarrow p)$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

(f) Sanningtabell för $((p \leftrightarrow (q \vee p)) \leftrightarrow r)$

p	q	r	$(q \vee p)$	$(p \leftrightarrow (q \vee p))$	$((p \leftrightarrow (q \vee p)) \leftrightarrow r)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

(g) Sanningtabell för $\neg(\neg p \rightarrow (p \vee r))$

p	r	$(p \vee r)$	$\neg p$	$(\neg p \rightarrow (p \vee r))$	$\neg(\neg p \rightarrow (p \vee r))$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0

(h) Sanningtabell för $(r \vee \neg(p \vee q))$

p	q	r	$(p \vee q)$	$\neg(p \vee q)$	$(r \vee \neg(p \vee q))$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

(i) Sanningtabell för $\neg(\neg q \rightarrow (p \leftrightarrow r))$

q	p	r	$(p \leftrightarrow r)$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow (p \leftrightarrow r))$	$\neg(\neg q \rightarrow (p \leftrightarrow r))$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

(j) Sanningtabell för $((r \vee r) \rightarrow q) \leftrightarrow \neg \neg p$

q	p	r	$\neg p$	$\neg \neg p$	$(r \vee r)$	$((r \vee r) \rightarrow q)$	$((r \vee r) \rightarrow q) \leftrightarrow \neg \neg p$
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1

(k) Sanningtabell för $((q \vee q) \vee (q \wedge p)) \vee p$

q	p	$(q \wedge p)$	$(q \vee q)$	$((q \vee q) \vee (q \wedge p))$	$((q \vee q) \vee (q \wedge p)) \vee p$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

(l) Sanningtabell för $\neg(\neg q \vee (q \wedge p))$

q	p	$(q \wedge p)$	$\neg q$	$(\neg q \vee (q \wedge p))$	$\neg(\neg q \vee (q \wedge p))$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

(m) Sanningstabell för $((\neg p \vee p) \vee p)$

p	$\neg p$	$(\neg p \vee p)$	$((\neg p \vee p) \vee p)$
0	1	1	1
1	0	1	1

(n) Sanningstabell för $(q \wedge ((p \rightarrow r) \vee (q \leftrightarrow q)))$

q	p	r	$(q \leftrightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$((p \rightarrow r) \vee (q \leftrightarrow q))$	$(q \wedge ((p \rightarrow r) \vee (q \leftrightarrow q)))$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(o) Sanningstabell för $((r \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge r$

q	r	$(q \rightarrow r)$	$(r \leftrightarrow r)$	$((r \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r))$	$((r \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge r$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

(p) Sanningstabell för $(q \wedge ((p \vee r) \rightarrow (q \rightarrow r)))$

q	p	r	$(q \rightarrow r)$	$(p \vee r)$	$((p \vee r) \rightarrow (q \rightarrow r))$	$(q \wedge ((p \vee r) \rightarrow (q \rightarrow r)))$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

(q) Sanningstabell för $(\neg \neg q \rightarrow q)$

q	$\neg q$	$\neg \neg q$	$(\neg \neg q \rightarrow q)$
0	1	0	1
1	0	1	1

1.2. Vi visar ett urval av lagarna för att demonstrera principen för hur ett bevis med sanningstabell kan konstrueras.

(a) Lagen om dubbel negation:

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

Vi visar detta genom visa att sanningstabellen för vänstersidan är samma som för p

p	$\neg p$	$\neg\neg p$
0	1	0
1	0	1

V.S.V.

(b) Vi visar den ena av De Morgans lagar:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q):$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

q	p	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

q	p	$\neg q$	$\neg p$	$(\neg p \vee \neg q)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

V.S.V.

(c) Vi visar den ena av de associativa lagarna:

$$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

q	p	r	$(q \vee r)$	$(p \vee (q \vee r))$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

q	p	r	$(p \vee q)$	$((p \vee q) \vee r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

V.S.V.

(d) Vi visar den ena av de Distributiva lagarna:

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

q	p	r	$(q \vee r)$	$(p \wedge (q \vee r))$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

q	p	r	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

V.S.V.

- 1.3. (a) Förenkla uttrycket: $(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$:

$$\begin{aligned}
(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p)) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
(p \leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee p)) &\Leftrightarrow \text{(DeMorganslag)} \\
(p \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee p)) &\Leftrightarrow \text{(Inversa lagen)} \\
(p \leftrightarrow (1 \vee \neg q)) &\Leftrightarrow \text{(Dominans)} \\
(p \leftrightarrow 1) &\Leftrightarrow \text{(Ekvivalenslagen)} \\
(p \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow p) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
(\neg p \vee 1) \wedge (1 \rightarrow p) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
(\neg p \vee 1) \wedge (\neg 1 \vee p) &\Leftrightarrow \text{(Dominans)} \\
1 \wedge (\neg 1 \vee p) &\Leftrightarrow \text{(Identitet)} \\
(\neg 1 \vee p) &\Leftrightarrow \text{(Definition av negation)} \\
(0 \vee p) &\Leftrightarrow \text{(Identitet)}
\end{aligned}$$

p

- (b) Förenkla uttrycket: $((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q$

$$\begin{aligned}
(((q \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
(((\neg q \vee q) \rightarrow p) \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Inversa lagen)} \\
((1 \rightarrow p) \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
((\neg 1 \vee p) \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Def. av negation)} \\
((0 \vee p) \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Identitet)} \\
(p \rightarrow \neg q) &\Leftrightarrow \text{(Implikationslagen)} \\
\neg p \vee \neg q &
\end{aligned}$$

1.4. (a) $((q \wedge q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$:

$$\begin{aligned} ((q \wedge q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ (q \wedge (p \vee q)) \rightarrow q &\Leftrightarrow (\text{Absorption}) \\ q \rightarrow q &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg q \vee q &\Leftrightarrow (\text{Inversa lagen}) \\ 1 & \end{aligned}$$

(b) $(\neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg(p \wedge p))$:

$$\begin{aligned} \neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg(p \wedge p) &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ \neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg p &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg\neg(r \leftrightarrow r) \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Dubbel negation}) \\ (r \leftrightarrow r) \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Ekvivalenslagen}) \\ ((r \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow r)) \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ (r \rightarrow r) \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ (\neg r \vee r) \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Inversa lagen}) \\ 1 \vee \neg p &\Leftrightarrow (\text{Dominans}) \\ 1 & \end{aligned}$$

(c) $(q \rightarrow (q \vee (q \vee r)))$:

$$\begin{aligned} q \rightarrow (q \vee (q \vee r)) &\Leftrightarrow (\text{Associativitet}) \\ q \rightarrow (q \vee q \vee r) &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ q \rightarrow (q \vee r) &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg q \vee q \vee r &\Leftrightarrow (\text{Inversa lagen}) \\ 1 \vee r &\Leftrightarrow (\text{Dominans}) \\ 1 & \end{aligned}$$

(d) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$:

$$\begin{aligned} \neg(p \leftrightarrow \neg p) &\Leftrightarrow (\text{Ekvivalenslagen}) \\ \neg((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg((\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ \neg(\neg p \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg(\neg p \wedge (\neg\neg p \vee p)) &\Leftrightarrow (\text{Dubbel negation}) \\ \neg(\neg p \wedge (p \vee p)) &\Leftrightarrow (\text{Idempotens}) \\ \neg(\neg p \wedge p) &\Leftrightarrow (\text{Inversa lagen}) \\ \neg 0 &\Leftrightarrow (\text{Def av negation}) \\ 1 & \end{aligned}$$

(e) $(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow q)$:

$$\begin{aligned} \neg(q \rightarrow r) \rightarrow q &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg(\neg q \vee r) \rightarrow q &\Leftrightarrow (\text{Implikationslagen}) \\ \neg\neg(\neg q \vee r) \vee q &\Leftrightarrow (\text{Dubbel negation}) \\ (\neg q \vee r) \vee q &\Leftrightarrow (\text{Associativitet}) \\ \neg q \vee r \vee q &\Leftrightarrow (\text{Inversa lagen}) \\ 1 \vee r &\Leftrightarrow (\text{Dominans}) \\ 1 & \end{aligned}$$