

TEN2, Diskreta strukturer, 2026-01-05

Lösningförslag

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

1. I en korsning finns ett övergångsställe och ett trafikljus för fotgängare. Trafikljuset har två tillstånd: det är antingen grönt eller rött. Vi antar att trafikljuset alltid fungerar. Fotgängare korsar gatan vid övergångsstället endast när ljuset är grönt.

Låt g , r och k vara satsvariabler enligt följande villkor:

- Satsvariabeln g är sann om trafikljuset är grönt och falsk om trafikljuset inte är grönt.
- Satsvariabeln r är sann om trafikljuset är rött och falsk om trafikljuset inte är rött.
- Satsvariabeln k är sann om det är tillåtet att korsa gatan och falsk om det inte är tillåtet att korsa gatan.

R1 Skapa en satslogisk formel (en regel för trafikljuset) som uttrycker att trafikljuset är antingen grönt eller rött (trafikljuset kan inte vara både grönt och rött samtidigt).

R2 Skapa en satslogisk formel (en regel för fotgängare) enligt ovanstående beskrivning. Använd endast satsvariablerna g och k .

(a) Skapa en **gemensam sanningstabell** för de två satslogiska formlerna (R1 och R2).

(b) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att enligt de två reglerna gäller: om det inte är tillåtet att korsa gatan, då är trafikljuset rött. Det vill säga att $R1$, $R2$ och $\neg k$ är tre premisser, och att r kan deduceras från dem.

Lösningförslag:

$$R1 \quad (g \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge r) \equiv g \text{ XOR } r \equiv g \oplus r$$

R2 $k \leftrightarrow g$ (andra satslogiska formler som uppfyller kravet att formeln är sann när k och g båda är sanna, och falsk när k är sann men g är falsk, accepterades också).

(a)

g	r	k	$g \text{ XOR } r$	$k \leftrightarrow g$
1	1	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1

(b) Satslogisk deduktion för $(g \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge r)$, $k \leftrightarrow g$, $\neg k \vDash r$.

(OBS! I tidigare har symbolen \Rightarrow använts för logisk konsekvens i stället för \vDash .)

- | | | |
|------|--|---------------------------------|
| (1) | $(k \leftrightarrow g)$ | Premiss |
| (2) | $((k \rightarrow g) \wedge (g \rightarrow k))$ | (1) och Ekvivalenslagen |
| (3) | $(g \rightarrow k)$ | (2) och Konjunktiv förenkling |
| (4) | $(\neg k)$ | Premiss |
| (5) | $\neg g$ | (3), (4) och Modus tollens |
| (6) | $((g \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge r))$ | Premiss |
| (7) | $(\neg g \wedge ((g \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge r)))$ | (5), (6) och Konjunktionsregeln |
| (8) | $(\neg g \wedge (g \wedge \neg r)) \vee (\neg g \wedge (\neg g \wedge r))$ | (7) och Distributivitet |
| (9) | $((\neg g \wedge g) \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge (\neg g \wedge r))$ | (8) och Associativitet |
| (10) | $((0 \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge (\neg g \wedge r)))$ | (9) och Inversa lagen |
| (11) | $(0) \vee (\neg g \wedge (\neg g \wedge r))$ | (10) och Dominans |
| (12) | $(\neg g \wedge (\neg g \wedge r))$ | (11) och Identitetslagen |
| (13) | $((\neg g \wedge \neg g) \wedge r)$ | (12) och Associativitet |
| (14) | $(\neg g \wedge r)$ | (13) och Idempotens |
| (15) | (r) | (14) och Konjunktiv förenkling |

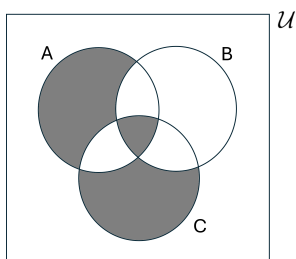
Av steg (1)-(15) följer att $(g \wedge \neg r) \vee (\neg g \wedge r)$, $k \leftrightarrow g$, $\neg k \vDash r$. VSV.

2. Låt A , B , och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder och låt \mathcal{U} vara ett universum sådant att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.

För del (c), (d) och (e), avgör om påståendena alltid, aldrig, eller ibland stämmer (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

Du får använda Venndiagram, medlemskapstabell, reglerna från formelblad B, eller en kombination av dessa.

- (a) Skapa en formel för det skuggade området i Venndiagrammet nedan genom att använda A , B och C samt mängdoperationer (union, snitt, differens, komplement). Formlerna behöver inte vara enkla.



Figur 1: Enter Caption

- (b) Förenkla uttrycket genom att använda reglerna i formelblad B. Resultatet bör innehålla HÖGST en mängdoperation.

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = ?$$

- (c) $A \cap (B \cup C) = \emptyset$
 (d) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$
 (e) $|B \setminus A| + |A \cap B| \leq |A \cup B|$

Lösningsförslag:

- (a) En möjliga formel är $((A \cup C) \setminus B) \setminus (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$
 (b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$ /Distributiva lagen, från höger till vänster/ =
 $((A \cap \bar{A}) \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$ /Distributiva lagen, från höger till vänster/ =
 $= ((A \cap \bar{A}) \cup B) \cap ((A \cap \bar{A}) \cup \bar{B}) =$ /2x Inversa lagen/ =
 $= (\emptyset \cup B) \cap (\emptyset \cup \bar{B}) =$ /2x Identitetslagen/ =
 $= B \cap \bar{B} =$ /Inversa lagen/ =
 $= \emptyset$

- (c) Det gäller ibland.
 Anta att $A = \{1\}$, $B = C = \{2\}$. Så är $B \cup C = \{2\}$ och därför $VL = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$ vilket innebär att $VL = HL$.
 Däremot, om $A = B = C = \{1\}$, så är $B \cup C = \{1\}$ och därför $VL = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ vilket innebär att $VL \neq HL$.

- (d) Det gäller alltid.
 (I) Om VL är lika med tomma mängden blir påståendet sant eftersom tomma mängden är en delmängd till alla mängder.
 (II) Om VL har något element, visar vi att alla element i VL är också element till HL som är definition för att VL är en delmängd till HL .
 Eftersom VL är en differens av två potensmängder, alla element i VL är mängder.
 Låt M vara en godtyckligt mängd i VL , dvs. $M \in 2^A \setminus 2^B$.
 Det innebär att M är en delmängd till A men inte en delmängd till B : $M \subseteq A$, $M \not\subseteq B$.
 Om mängd M är en delmängd till A är det också en delmängd till $A \cup B$ eftersom $A \cup B$ innehåller alla element som A innehåller. Dvs. $M \in 2^{A \cup B}$ som är HL .

(e) Det gäller alltid.

Eftersom mängder $B \setminus A$ och $A \cap B$ är disjunkta, summan av antalet element i de två mängderna är lika med antalet element i deras unionen som är $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B$. Dvs. $|B \setminus A| + |A \cap B| = |B|$. Eftersom $A \cup B$ innehåller alla element i B , måste antal element i unionen vara större eller lika med antal element i B , dvs. $|B| \leq |A \cup B|$ vilket innebär att $|B \setminus A| + |A \cap B| \leq |A \cup B|$.

(5 poäng)

3. (a) Låt mängden $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:

$$R = \{(x, y) : x - y \leq 1\}.$$

Skriv upp alla par (x, y) som ingår i relationen R .

(b) Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.

(c) Bestäm det transitiva höljet för relationen R .

(5 poäng)

Lösningsförslag.

(a) Låt oss börja med $x = 0$ och undersöka vilka andra element $y \in A$ kan vi para ihop det för att få $0 - y \leq 1$.

- $0 - 0 \leq 1$ dvs. $(0, 0)$ ingår i relationen
- $0 - 1 = -1 \leq 1$ dvs. $(0, 1)$ ingår i relationen
- $0 - 2 = -2 \leq 1$ dvs. $(0, 2)$ ingår i relationen
- $0 - 3 = -3 \leq 1$ dvs. $(0, 3)$ ingår i relationen.

Om vi betraktar de andra element i A på samma sätt får vi att även

- för 1 ingår $(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ i relationen
- för 2 ingår $(2, 1), (2, 2), (2, 3)$ i relationen, och
- för 3 ingår $(3, 2), (3, 3)$ i relationen.

Alltså

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

- (b)
- En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (x, x) \in R$. Eftersom $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ tillhör R , är R reflexiv.
 - En relation är symmetrisk om $(x, y) \in R$ innebär att $(y, x) \in R$ också för alla $x, y \in A$. Detta gäller för denna relation inte eftersom till exempel $(1, 3) \in R$ men $(3, 1) \notin R$.
 - En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A$ om $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$, då måste vara $x = y$. Eftersom t.ex. både $(0, 1)$ och $(1, 0)$ tillhör relationen men $0 \neq 1$ är relationen inte antisymmetrisk.
 - En relation är transitiv om för alla $(x, y), (y, z) \in R$ gäller att $(x, z) \in R$. Eftersom både $(3, 2)$ och $(2, 1)$ tillhör relationen men $(3, 1)$ tillhör inte relationen är relationen inte transitiv.
- (c) Vi kan beräkna transitiva höljet för relationen med den iterativa metoden. (Det finns andra metoder som fungerar.)

- $S_0 = R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

- Varje rad visar de paren som man får när ett par (x, y) tas från R och kombineras med ett par (y, z) från R . Om vi väljer $(0, 0)$ som (x, y) (dvs. $x = 0, y = 0$) och sen väljer de paren (y, z) som börjar med $y = 0$: $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$ får vi raden $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$ nedanför. Vi får andra raderna på samma sätt.

$$S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 =$$

$$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3),$$

$$(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3),$$

$$(0, 1), (0, 2), (0, 3),$$

$$(0, 2), (0, 3),$$

$$(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3),$$

$$(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3),$$

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3),$$

$$(1, 2), (1, 3),$$

$$(2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3),$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3),$$

$$(2, 2), (2, 3),$$

$$(3, 1), (3, 2), (3, 3),$$

$$(3, 2), (3, 3), \} \cup S_0 =$$

$$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Observera att S_1 innehåller alla element av $A \times A$ utan paret $(3, 0)$.

Vi får nästa iteration genom att applicera R till S_1 och ta deras union med S_1 . När vi applicerar R till S_1 matchar vi $(3, 1) \in S_1$ och $(1, 0) \in R$ och får vi $(3, 0)$ vilket innebär att resultatet för S_2 är lika med $A \times A$. Eftersom $A \times A$ innehåller alla möjliga par är det lika med transitiva höljet: $R^+ = A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

4. (a) Låt oss definiera funktion f som $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

där \mathbb{R} står för de reella talen. Ange värdena $f(-1), f(0), f(0,5), f(2)$ och $f(5)$.

- (b) Bestäm om funktionen f är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

- (c) Låt oss definiera en annan funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ som

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

Visa att g inte är surjektiv.

- (d) Är g injektiv?

- (e) Ändra domänen eller målmängden eller båda, så att funktionen g blir bijektiv. (Observera att $g(x)$ är fortfarande definieras som $\frac{1}{(1-x)^2}$.)

(5 poäng)

Lösningsförslag:

$$(a) f(-1) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$f(0,5) = \frac{1}{1-0,5} = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$f(5) = \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}$$

- (b) En funktion är injektiv om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$. Låt oss anta att $f(x_1) = f(x_2)$ för några $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Detta innebär att $\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2}$.

Låt oss multiplicera båda sidorna med $1-x_1$ och $1-x_2$ så vi får

$1-x_2 = 1-x_1$. Det medför att $x_1 = x_2$ och därmed är funktionen injektiv.

En funktion är surjektiv om för alla y i målmängden finns det minst ett element x i domänen så att $f(x) = y$. Låt y vara ett godtyckligt element i målmängden, \mathbb{R} och låt oss anta att det finns $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ så att $y = \frac{1}{1-x}$.

Låt oss multiplicera båda sidorna med $1-x$ så vi får

$y \cdot (1-x) = 1$. Om $y = 0$ har ekvationen ingen lösning vilket innebär att det inte finns någon Urbild x i domänen för $y = 0$ i målmängden. Det medför att funktionen inte är surjektiv. Alltså funktionen är inte bijektiv.

(c) Låt oss anta att det finns något $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ så att $0 = \frac{1}{(1-x)^2}$. Eftersom ett bråk kan vara lika med 0 endast om täljaren är lika med 0 finns det inte en sådant x så att $g(x) = 0$ och därmed är funktionen inte surjektiv. (Vi kan använda metoden som vi har använt i del (b) också och man kan använda det här sättet i del (b) för att visa att funktionen inte kan ta värdet 0.)

(d) Låt oss anta att $g(x_1) = g(x_2)$ för några $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Detta innebär att $\frac{1}{(1-x_1)^2} = \frac{1}{(1-x_2)^2}$. Låt oss multiplicera båda sidorna med $(1-x_1)^2$ och $(1-x_2)^2$ så vi får $(1-x_2)^2 = (1-x_1)^2$ vilket medför att den absolutvärden av $1-x_1$ och $1-x_2$ är lika med varandra. Om vi väljer $x_1 = 2, x_2 = 0$ får vi att $g(2) = \frac{1}{(1-2)^2} = \frac{1}{1} = 1$ och $g(0) = \frac{1}{(1-0)^2} = \frac{1}{1} = 1$ vilket innebär att funktionen inte är injektiv.

(e) • Funktion g är inte injektiv på grund av att upphöjning till kvadraten gör negativa tal också positiv. Om vi uteslutar dessa tal x för som $1-x$ blir negativ (eller positiv som inte diskuteras här) får vi en injektiv funktion.
Olikheten $1-x \geq 0$ är sann om $1 \geq x$. Samtidigt vill vi inte att nämnaren blir 0 därför uteslutar vi fortfarande 1 vilket medför att om vi begränsar domänen till $\{x : x \in \mathbb{R}, x < 1\}$ blir funktionen injektiv.

• (Man kan kontrollera injektivitet men det behövs inte om man har motiverat lösningen. Låt oss anta att $g(x_1) = g(x_2)$ för några $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 < 1$, dvs. $\frac{1}{(1-x_1)^2} = \frac{1}{(1-x_2)^2}$. Låt oss multiplicera båda sidorna med $(1-x_1)^2$ och $(1-x_2)^2$ så vi får $(1-x_2)^2 = (1-x_1)^2$. Eftersom $x_1, x_2 < 1$ är båda $1-x_2$ och $1-x_1$ positiva som medför att $1-x_1 = 1-x_2$ vilket innebär att $x_1 = x_2$ vilket skulle visas för injektivitet.)

• Sista steget är att definiera målmängden som mängden av funktionsvärde som funktionen bildar till därmed blir funktionen surjektiv också.
Låt oss betrakta vilka y värde skulle kunna $g(x)$ bildas till där $x \in \mathbb{R}, x < 1$. Låt oss lösa ekvationen $y = \frac{1}{(1-x)^2}$ för sådana x .
 $y \cdot (1-x)^2 = 1$
 $(1-x)^2 = \frac{1}{y}$. Eftersom $(1-x)^2$ är positiv, måste y vara positiv också. Om y är positiv finns \sqrt{y} också, dvs. $1-x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ är definierad (observera att $1-x$ också är positiv).
Så vi får att $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}$ som finns i domänen för alla positiva y eftersom det är mindre än 1. Alltså genom att sätta målmängden till $\{y \in \mathbb{R} : 0 < y\}$ får vi en bijektiv funktion.

5. Bevisa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

för alla heltal $n \geq 1$.

(5 poäng)

Lösningsförslag.

Bevis:

Låt $P(n)$ vara påståendet att $P(n) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Observera att nämnaren aldrig är lika med 0 eftersom $1 \leq n$. Dessutom är täljaren och nämnaren

alltid positiv på båda leden på grund av samma skäl.

Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$

Bassteget:

Först visar vi att $P(1)$ är sant för $n = 1$. $P(1)$ gäller eftersom

$$P(1) : \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Induktionssteget:

Anta att $P(k) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}$ sant för något $k \geq 1$.

Vi ska nu visa att detta medför att $P(k+1)$ är sant, dvs.

$$P(k+1) : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \frac{k+1}{(k+1)+1} \text{ gäller.}$$

Låt oss börja med vänsterledet.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \\ &= \text{/enligt induktionsantagande/} = \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1) \cdot (k+2)} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+1)}{(k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{k+2} \text{ vilket är lika med HL.} \end{aligned}$$

Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

6. Låt A vara mängden $A = \{a, b, c\}$ och B vara mängden $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Låt R vara en relation från A till B ($R \subseteq A \times B$):

$$R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (c, 4)\}$$

Låt S vara en relation från B till A ($S \subseteq B \times A$):

$$S = \{(1, b), (2, b), (2, c), (3, a), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

- Skapa sammansättningen $R \circ S$.
- Skapa sammansättningen $S \circ R$.
- Är $R \circ S$ en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv) eller en ekvivalensrelation (en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
- Är $S \circ R$ en partialordning eller en ekvivalensrelation? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

Lösningsförslag:

- När vi beräknar sammansättningen $R \circ S$ väljer vi ett par (x, y) från S och kombinerar med ett par (y, z) från R .
Till $(1, b) \in S$ kan vi matcha $(b, 1)$ och $(b, 3)$ från R så vi får $(1, 1)$ och $(1, 3)$.
Till $(2, b)$ kan vi matcha $(b, 1)$ och $(b, 3)$ så vi får $(2, 1)$ och $(2, 3)$.
Och så vidare får vi $R \circ S = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,1), (4,3), (4,4)\}$
 $= \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$
- $S \circ R = \{(a,b), (a,c), (a,a), (a,c), (b,b), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$
- En relation är transitiv om för alla $(x, y), (y, z) \in R$ gäller att $(x, z) \in R$. $R \circ S$ är inte transitiv eftersom $(1, 3), (3, 2) \in R \circ S$ men $(1, 2) \notin R \circ S$. Därmed är sammansättningen inte en partialordning eller ekvivalensrelation.

4. $S \circ R$ är lika med $A \times A$, som är transitiv, eftersom alla möjliga par som skulle kunna skapas genom att matcha två par är med relationen.

En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (x, x) \in R$. $S \circ R$ är reflexiv, eftersom $(a, a), (b, b), (c, c) \in S \circ R$.

En relation är symmetrisk om för alla par i relationen också är den omvända med den relationen. Eftersom $S \circ R$ är lika med $A \times A$ är den symmetrisk eftersom alla möjliga par, därmed är omvända paren också med.

En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ medför att $x = y$. Eftersom både (a, b) och (b, a) är med relationen är $S \circ R$ inte antisymmetrisk.

Därmed är $S \circ R$ en ekvivalensrelation men är inte en partialordning.

A Formelblad 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser

OBS! I tidigare har symbolen \Leftrightarrow använts för logisk ekvivalens (\equiv) och \Rightarrow för logisk konsekvens (\models).

Logiska ekvivalenser

Regel	Benämning
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Kommutativa lagarna
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotens
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 1 \equiv 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \equiv 0$ $p \vee \neg p \equiv 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorption
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen

Logiska konsekvenser

$(p \rightarrow q), p \models q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \models \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \models p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \models p$	Konjunktiv förenkling
$p \models p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \models p$	Disjunktiv syllogism
$(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r) \models r$	Ellereliminering
$p, q \models p \wedge q$	Konjunktionsregeln

B Formelblad: Likheter inom mängdläran

Låt A , B och C beteckna godtyckliga delmängder till ett givet universum \mathcal{U} så att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Då gäller följande likheter:

Regel	Benämning
$\overline{\overline{A}} = A$	Lagen om dubbelt komplement
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgans lagar
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativa lagarna
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Associativa lagarna
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributiva lagarna
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotens
$A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identitetslagarna
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Dominans
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Inversa lagarna
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionslagar
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Differenslagen