Tentamen i Diskreta strukturer

Kurskod	TDDC75
Datum	2026-01-05
Modul	TEN2

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Szilvia Varro-Gyapay, 013284092.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. I en korsning finns ett övergångställe och ett trafikljus för fotgängare. Trafikljuset har två tillstånd: det är antingen grönt eller rött. Vi antar att trafikljuset alltid fungerar. Fotgängare korsar gatan vid övergångstället endast när ljuset är grönt.

   Låt g, r och k vara satsvariabler enligt följande villkor:

   - Satsvariabeln g är sann om trafikljuset är grönt och falsk om trafikljuset inte är grönt.
   - Satsvariabeln r är sann om trafikljuset är rött och falsk om trafikljuset inte är rött.
   - Satsvariabeln k är sann om det är tillåtet att korsa gatan och falsk om det inte är tillåtet att korsa gatan.

   R1 Skapa en satslogisk formel (en regel för trafikljuset) som uttrycker att trafikljuset är antingen grönt eller rött (trafikljuset kan inte vara både grönt och rött samtidigt).

   R2 Skapa en satslogisk formel (en regel för fotgängare) enligt ovanstående beskrivning. Använd endast satsvariablerna g och k.

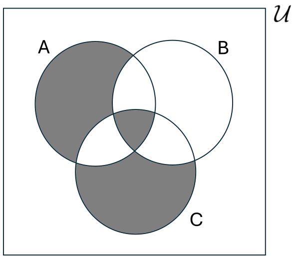
   (a) Skapa **en gemensam sanningstabell** för de två satslogiska formlerna ($R1$ och $R2$).

   (b) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att enligt de två reglerna gäller: om det inte är tillåtet att korsa gatan, då är trafikljuset rött.
   Det vill säga att $R1$, $R2$ och $\neg k$ är tre premisser, och att r kan deduceras från dem.

(5 poäng)

2. Låt A, B, och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder och låt $\mathcal{U}$ vara ett universum sådant att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.
   För del (c), (d) och (e), avgör om påståendena alltid, aldrig, eller ibland stämmer (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).
   Du får använda Venndiagram, medlemskapstabell, reglerna från formelblad B, eller en kombination av dessa.

   (a) Skapa en formel för det skuggade området i Venndiagrammet nedan genom att använda A, B och C samt mängdoperationer (union, snitt, differens, komplement). Formlerna behöver inte vara enkla.



Figur 1: Enter Caption

   (b) Förenkla uttrycket genom att använda reglerna i formelblad B. Resultatet bör innehålla HÖGST en mängdoperation.
   $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ =?

   (c) $A \cap (B \cup C) = \varnothing$

   (d) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$

   (e) $|B \setminus A| + |A \cap B| \leq |A \cup B|$

(5 poäng)

3. (a) Låt mängden $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:
   $R = \{(x, y) : x - y \leq 1\}$.
   Skriv upp alla par (x, y) som ingår i relationen R.
   (b) Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.
   (c) Bestäm det transitiva höljet för relationen R.

(5 poäng)

4. (a) Låt oss definiera funktion f som $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{1 - x},$$

   där $\mathbb{R}$ står för de reella talen. Ange värdena f(-1),f(0), f(0,5), f(2) och f(5).
   (b) Bestäm om funktionen f är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.
   (c) Låt oss definiera en annan funktion $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ som

$$g(x) = \frac{1}{(1 - x)^2},$$

   Visa att g inte är surjektiv.
   (d) Är g injektiv?
   (e) Ändra domänen eller målmängden eller båda, så att funktionen g blir bijektiv. (Observera att $g(x)$ är fortfarande definieras som $\frac{1}{(1-x)^2}$.)

(5 poäng)

5. Bevisa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

   för alla heltal $n \geq 1$.

(5 poäng)

6. Låt A vara mängden $A = \{a, b, c\}$ och B vara mängden $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Låt R vara en relation från A till B ($R \subseteq A \times B$):

$$R = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (c, 4)\}$$

   Låt S vara en relation från B till A ($S \subseteq B \times A$):

$$S = \{(1, b), (2, b), (2, c), (3, a), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}$$

   (a) Skapa sammansättningen $R \circ S$.
   (b) Skapa sammansättningen $S \circ R$.
   (c) Är $R \circ S$ en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv) eller en ekvivalensrelation (en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
   (d) Är $S \circ R$ en partialordning eller en ekvivalensrelation? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

A Formelblad 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser

OBS! I tidigare har symbolen $\Leftrightarrow$ använts för logisk ekvivalens ($\equiv$) och $\Rightarrow$ för logisk konsekvens ($\vDash$.)

Logiska ekvivalenser

Regel	**Benämning**
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Kommutativa lagarna
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotens
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 1 \equiv 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \equiv 0$ $p \vee \neg p \equiv 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorption
$p \to q \equiv \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$	Ekvivalenslagen

Logiska konsekvenser

$(p \to q), p \vDash q$	Modus ponens
$(p \to q), \neg q \vDash \neg p$	Modus tollens
$(p \to q), (q \to r) \vDash p \to r$	Syllogism
$p \wedge q \vDash p$	Konjunktiv förenkling
$p \vDash p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \vDash p$	Disjunktiv syllogism
$(p \vee q), (p \to r), (q \to r) \vDash r$	Ellereliminering
$p, q \vDash p \wedge q$	Konjunktionsregeln

B Formelblad: Likheter inom mängdläran

Låt A, B och C beteckna godtyckliga delmängder till ett givet universum $\mathcal{U}$ så att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$.
Då gäller följande likheter:

Regel	**Benämning**
$\overline{\overline{A}} = A$	Lagen om dubbelt komplement
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgans lagar
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativa lagarna
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Associativa lagarna
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributiva lagarna
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotens
$A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$	Identitetslagarna
$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Dominans
$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Inversa lagarna
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionslagar
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Differenslagen