

# Tentamen i Diskreta strukturer

|         |            |
|---------|------------|
| Kurskod | TDDC75     |
| Datum   | 2025-01-07 |
| Modul   | TEN2       |

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Szilvia Varro-Gyapay, 013284092.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. Det finns en kaffemaskin som fungerar enligt följande regler:

- R1 Maskinen kan göra en kopp kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe och det finns ström.
- R2 Maskinen kan göra två koppar kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe och det finns ström.
- R3 Om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe, då finns det tillräckligt med vatten för en kopp kaffe.

Låt  $v1$ ,  $v2$ ,  $s$ ,  $k1$  och  $k2$  vara satsvariabler enligt följande villkor:

- Satsvariabel  $v1$  är sann om det finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe, och falsk om det inte finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe.
- Satsvariabel  $v2$  är sann om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe, och falsk om det inte finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe.
- Satsvariabel  $s$  är sann om det finns ström, och falsk om det inte finns ström.
- Satsvariabel  $k1$  är sann om och endast om det är möjligt att göra en kopp kaffe.
- Satsvariabel  $k2$  är sann om och endast om det är möjligt att göra två koppar kaffe.

- (a) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln  $R1$  med hjälp av ovanstående satslogiska variabler:  $k1 \leftrightarrow \dots$   
Låt oss kalla den här formeln  $F1$ .
- (b) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln  $R2$  med hjälp av ovanstående satslogiska variabler:  $k2 \leftrightarrow \dots$   
Låt oss kalla den här formeln  $F2$ .
- (c) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln  $R3$  med hjälp av ovanstående satslogiska variabler:  $v2 \rightarrow \dots$   
Låt oss kalla den här formeln  $F3$ .
- (d) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln:  
 $(v2 \wedge s) \rightarrow (v1 \wedge s)$ .
- (e) Använd satslogisk deduktion och reglerna i formelbladet för att bevisa att om de ovanstående tre satslogiska formlerna  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$  samt satsvariabel  $k2$  är sanna (dvs. de fyra är våra premisser), då är den satslogiska variabeln  $k1$  också sann (dvs.  $k1$  kan deduceras från  $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ , och  $k2$ ).

(5 poäng)

2. Låt  $A$ ,  $B$ , och  $C$  vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

- (a)  $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B$
- (b)  $A \cap B \subseteq A \setminus B$
- (c)  $\overline{A \cup B \setminus C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$
- (d)  $2^A \subseteq 2^{A \setminus B}$
- (e)  $|A \setminus B| < |A| + |B|$

(5 poäng)

3. (a) Avgör för relationen nedan om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.

Låt mängden  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  och relationen  $R \subseteq A \times A$  vara definierad som:

$$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ och } a + b \text{ är jämn}\}$$

- (b) Bestäm det transitiva höljet för relationen ovan.

(5 poäng)

4. Låt  $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$  vara definierad enligt  $f(n) = (n + 2)^2 + 2$  där  $\mathbb{N}^+$  betecknar de positiva naturliga talen.

- (a) Ange värdena  $f(1)$ ,  $f(2)$ , och  $f(4)$ .
- (b) Visa att  $f$  är injektiv.
- (c) Visa att  $f$  inte är surjektiv.
- (d) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen inte längre är injektiv? Motivera ditt svar.
- (e) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen blir surjektiv? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

5. Bevisa med hjälp av induktion att  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$  för alla heltal  $n \geq 0$ .

(5 poäng)

6. Låt  $A$  vara mängden  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .  
Låt  $R$  och  $S$  vara två relationer över  $A \times A$ :  
 $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ ,  
 $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ .
- (a) Är  $R$  en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
  - (b) Är  $S$  en partialordning? Motivera ditt svar.
  - (c) Skapa sammansättningen  $R \circ S$ .
  - (d) Skapa sammansättningen  $S \circ R$ .
  - (e) Är sammansättningarna partialordningar? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

## A Formelblad

| Regel                                                                                                                                      | Benämning                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| $\neg\neg p \Leftrightarrow p$                                                                                                             | Lagen om dubbel negation |
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$                             | De Morgans lagar         |
| $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$<br>$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$                     | Associativa lagarna      |
| $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$<br>$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | Distributiva lagarna     |
| $p \wedge p \Leftrightarrow p$<br>$p \vee p \Leftrightarrow p$                                                                             | Idempotens               |
| $p \wedge 1 \Leftrightarrow p$<br>$p \vee 0 \Leftrightarrow p$                                                                             | Identitetslagarna        |
| $p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$<br>$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$                                                                             | Dominans                 |
| $p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$<br>$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$                                                                   | Inversa lagarna          |
| $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$<br>$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$                                                         | Absorption               |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$                                                                                            | Implikationslagen        |
| $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$                                                                                | Kontrapositiva lagen     |
| $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$                                                           | Ekvivalenslagen          |
| $(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$                                                                                                       | Modus ponens             |
| $(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$                                                                                             | Modus tollens            |
| $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$                                                                         | Syllogism                |
| $p \wedge q \Rightarrow p$                                                                                                                 | Konjunktiv förenkling    |
| $p \Rightarrow p \vee q$                                                                                                                   | Disjunktiv förstärkning  |
| $(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$                                                                                                         | Disjunktiv syllogism     |
| $p, q \Rightarrow p \wedge q$                                                                                                              | Konjunktionsregeln       |

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser