

Redovisningsuppgifter i TDDC75 Diskreta strukturer

Seminarium 2, Grupp B: Mängdlära

Szilvia Varro-Gyapay

Räkna på redovisningsuppgifterna individuellt utan att använda AI-verktyg eller söka upp dem på Google. Lycka till!

1. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar, dvs. ge ett bevis om det stämmer alltid eller aldrig, och ge två exempel om det gäller ibland (ett exempel när det stämmer och ett annat exempel när det inte gäller). (Inspirerat av Mikael Asplunds tidigare uppgifter.)

- (a) $(A \cap B) \subseteq 2^B \setminus \{\emptyset\}$
(b) $(2^A \setminus 2^B) \subseteq 2^A$

Lösning:

- (a) Påståendet gäller ibland.

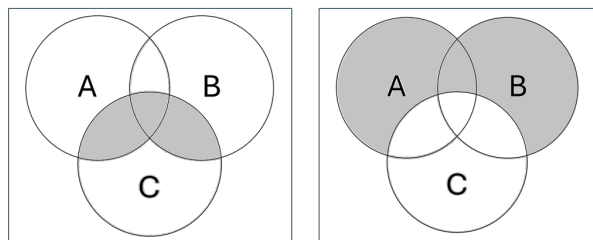
- i. Exempel när det gäller: låt $A = B = \emptyset$. Då $A \cap B = \emptyset$ och $2^B \setminus \{\emptyset\} = 2^\emptyset \setminus \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$. Eftersom $\emptyset$ är en delmängd till alla mängder, är det också en delmängd till tomma mängden: $\emptyset \subseteq \emptyset$. Alltså påståendet gäller i detta fall.
- ii. Exempel när det inte gäller: låt $A = B = \{1\}$. Då $A \cap B = \{1\}$ och $2^B \setminus \{\emptyset\} = 2^{\{1\}} \setminus \{\emptyset\} = \{\{1\}, \emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{1\}\}$ där $\{1\} \notin \{\{1\}\}$ eftersom $\{1\}$ är ett element med i HL, men inte en delmängd till HL. (En mängd C är en delmängd till en mängd D om alla element i C är ett element med i D också. I detta fall har VL ett element, nämligen 1, men HL har inte 1 som element med - endast $\{1\}$).

- (b) Påståendet gäller alltid.

Vi visar att alla element i $2^A \setminus 2^B$ tillhör också 2^A vilket är definitionen för att vara en delmängd av en mängd.

För varje $x \in 2^A \setminus 2^B$ gäller att $x \in 2^A$ och $x \notin 2^B$. Det innebär att $x \subseteq A$ och $x \not\subseteq B$. Eftersom $x \subseteq A$ är $x \in 2^A$, vi att $VL \subseteq HL$, alltså påståendet gäller.

2. (a) Låt A, B och C vara tre godtyckliga mängder. Skapa en formel för de två skuggade områdena i de två Venndiagrammen nedan genom att använda A, B och C samt mängdoperationer (union, snitt, differens, komplement). Formlerna behöver inte vara enkla.



En lösning kan vara: $VL = (A \cup B) \cap C$, $HL = (A \cup B) \setminus C$.

- (b) Avgör om de två mängderna skulle kunna vara lika med varandra. Om det finns sådana mängder A, B och C , räcker det att ange ett exempel. Om det inte finns sådana mängder, bevisa att de två mängderna inte kan vara lika med varandra. (Vilken method som helst får användas.)

Lösning: Eftersom VL och HL täcker olika områden blir de lika endast om båda är den tomma mängden. Låt oss verifiera: om $A = B = \emptyset$ blir

$VL = (A \cup B) \cap C = (\emptyset \cup \emptyset) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset$ och
 $HL = (A \cup B) \setminus C = (\emptyset \cup \emptyset) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset$.
Alltså har vi hittat ett exempel där $VL = HL$.

Observera att HL kan skrivas om till $(A \cup B) \cap \overline{C}$ genom differenslagen. Vi får alltså $VL = (A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap \overline{C}$. Det skulle kunna verka som en uppenbar slutsats att de två leden aldrig kan vara lika med varandra eftersom (i) det ena är snittet mellan $(A \cup B)$ och C och det andra är snittet mellan $(A \cup B)$ och $\overline{C}$ och (ii) C och $\overline{C}$ är disjunkta. Men slutsatsen är fel som vi har visat, eftersom vi tillåter att $A = B = \emptyset$.