

Lösningsförslag för redovisningsuppgifter i TDDC75

Seminarium 2, Grupp A: Mängdlära

Szilvia Varro-Gyapay

1. Låt A , B och C vara tre godtyckliga mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar, dvs. ge ett bevis om det stämmer alltid eller aldrig, och ge två exempel om det gäller ibland (ett exempel när det stämmer och ett annat exempel när det inte gäller). (Inspirerat av Mikael Asplunds tidigare uppgifter.)

- (a) $(A \cap B) \in 2^B \setminus \{\emptyset\}$
(b) $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$

Lösning.

- (a) Påståendet gäller ibland.

i. Exempel när det gäller: låt $A = \{1\}$, $B = \{1\}$. Då $A \cap B = \{1\}$ och $2^B \setminus \{\emptyset\} = 2^{\{1\}} \setminus \{\emptyset\} = \{\{1\}, \emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \{\{1\}\}$ där $\{1\} \in \{\{1\}\}$.

ii. Exempel när det inte gäller: låt $A = B = \emptyset$. Då $A \cap B = \emptyset$ och $2^B \setminus \{\emptyset\} = 2^\emptyset \setminus \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$. Eftersom $\emptyset$ inte är ett element av $\emptyset$ gäller påståendet inte i detta fall.

- (b) Påståendet gäller alltid.

Vi visar att alla element i $2^A \cap 2^B$ tillhör också $2^{A \cup B}$ vilket är definitionen för att vara en delmängd av en mängd.

För varje $x \in 2^A \cap 2^B$ gäller att $x \in 2^A$ och $x \in 2^B$. Det innebär att $x \subseteq A$ och $x \subseteq B$. Det medför att $x \subseteq A \cup B$ vilket innebär att $x \in 2^{A \cup B}$, alltså $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A \cup B}$.

2. Låt A , B och C vara tre ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar, dvs. ge ett bevis om det stämmer alltid eller aldrig, och ge två exempel om det gäller ibland (ett exempel när det stämmer och ett annat exempel när det inte gäller). (Inspirerat av Mikael Asplunds tidigare uppgifter.)

$$\overline{\overline{A \cap B} \setminus C} = (A \cup B) \cap C$$

Lösning. Påståendet gäller aldrig.

Låt oss omskriva VL genom att använda likhetsreglerna:

$$VL = \overline{\overline{A \cap B} \setminus C} = \text{/De Morgans lagar/} = \overline{\overline{A \cup B} \setminus C} = \text{/Lagen om dubbelt komplement/} = (A \cup B) \setminus C \text{ /Differenslagen/} = (A \cup B) \cap \overline{C}.$$

Eftersom A och B är icke-tomma mängder är deras union icke-tom. På grund av att (i) $A \cup B \subseteq \mathcal{U}$ och både A och B är icke-tomma och (ii) C är icke-tom, och $\overline{C}$ består av element i universumet som inte tillhör C , alltså är de disjunkta och tillsammans innehåller alla element av universumet, måste minst ett av snittet av $A \cup B$ och $\overline{C}$ och snittet av $A \cup B$ och C vara icke-tomma och VL och HL har inget gemensamt element.