

TDDC75 – Föreläsning 7 2025 HT1

Szilvia Varro-Gyapay (email: szilvia.varro-gyapay@liu.se)

Baserat på föreläsningarna av Mikael Asplund och boken [Asratian et al.](#)

Relationer forts.

Tentauppgift (30/8/2025)

Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:

$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ och } a \cdot b \text{ är jämn}\}$ Skriv upp alla par (a, b) som ingår i relationen R .

Lösning: Med 1 kan vi välja 2 och 4 så att deras produkten blir jämn, vilket innebär att $(1, 2)$ och $(1, 4)$ tillhör relationen. Vi fortsätter med de andra elementen och får då

$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$

Uppgift forts.

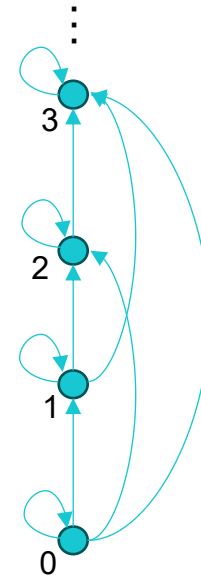
Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.

Lösning:

- Eftersom $(1, 1)$ inte tillhör R , är R inte reflexiv.
- En relation är symmetrisk om $(x, y) \in R$ innebär att $(y, x) \in R$ också för alla $x, y \in A$. Detta gäller för denna relation eftersom om (x, y) är med i relationen innebär det att $x \cdot y$ är jämnt, och eftersom multiplikation är kommutativ, gäller också att $y \cdot x$ är jämnt. Därför är (y, x) också med i relationen, och relationen är symmetrisk. (Man kan också kolla det genom att gå igenom element och se om det finns omvända par också.)
- En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A$ om $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$, så $x = y$. Eftersom både $(1, 2)$ och $(2, 1)$ tillhör relationen men $1 \neq 2$ är relationen inte antisymmetrisk.
- En relation är transitiv om för alla $(x, y), (y, z) \in R$ gäller att $(x, z) \in R$. Eftersom både $(1, 2)$ och $(2, 3)$ tillhör relationen men $(1, 3)$ tillhör inte relationen, är relationen inte transitiv.

Partialordning

- Definition 1.
En relation $R \subseteq A \times A$ som är reflexiv, anti-symmetrisk och transitiv är en partialordning.
- Exempel: $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $R = \{(x,y) : x \leq y\}$



Ekvivalensrelation

- Definition 2.

En relation $R \subseteq A \times A$ som är reflexiv, symmetrisk och transitiv är en ekvivalensrelation på A .

- Definition 3.

Låt $\equiv \subseteq A \times A$ vara en ekvivalensrelation. För varje $x \in A$ definieras då ekvivalensklassen $[x]$ för x som

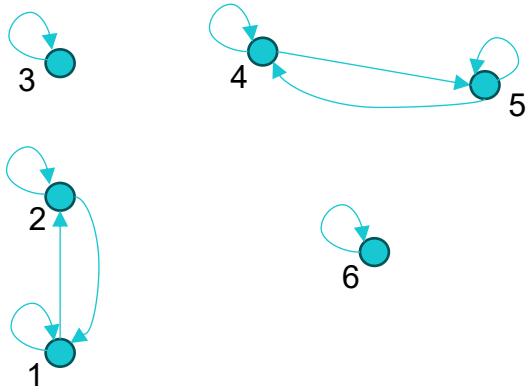
$$[x] = \{y \in A \mid x \equiv y\}.$$

- Exempel: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

Ekvivalensrelation - partitioner

$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}$



$$[1] = \{1, 2\} = [2]$$

$$[3] = \{3\}$$

$$[4] = \{4, 5\} = [5]$$

$$[6] = \{6\}$$

Sammansättning av två relationer

- Definition 4.
Låt $R \subseteq A \times B$ och $S \subseteq B \times C$. Sammansättningen av R och S betecknas $S \circ R$ och defineras som

$$S \circ R = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{det finns } y \in B \text{ så att } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

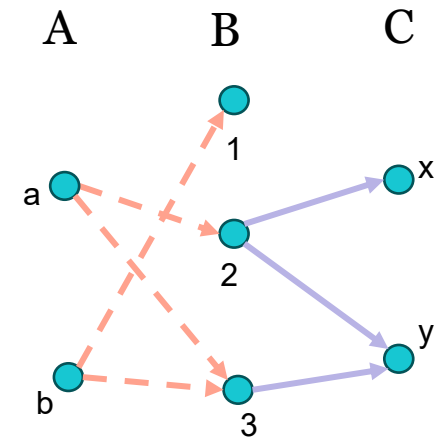
- Exempel: $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y\}$

$$R_1 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 3)\}$$

$$R_2 = \{(2, x), (2, y), (3, y)\}$$

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, x), (a, y), (b, y)\}$$

(finns en väg från ett element i A
till ett element i C)



Det transitiva höljet

- $R^1 = R$
- $R^2 = R \circ R$
- $R^3 = R \circ R^2$
- $R^4 = R \circ R^3$
- Definition 5.
- Det transitiva höljet R^+ av $R \subseteq A \times A$ är

$$R^+ = \bigcup_{i \geq 0} R^i$$

dvs. unionen av $R^1, R^2, R^3, R^4, \dots$

En metod att beräkna transitiva höljet

1. Låt $S_0 = R$ ($n=0$).
2. Låt $S_{n+1} = (R \circ S_n) \cup S_n$
3. Om $S_{n+1} = S_n$, så är det klart, $R^+ = S_n$, annars låt n vara $n+1$ och gå till 2.

Resurser

- Boken (delar av 8.3): <https://liu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1475503&dswid=7711>
- Dokumentet Relationer och höljen (av Mikael Asplund, se Föreläsningar sidan): kap. 1 (utan Definition 4), 2, 3, samt transitiva höljet i kap. 4: <https://www.ida.liu.se/~TDDC75/kursmaterial/RelationerOchHoljen.pdf>
- Videor (vi har inte diskuterat relationmatriser):
 - Ekvivalensrelationer:
<https://www.youtube.com/watch?v=VIQcAcQcarY&list=PLr8s0R2uMHhPeBOPRhervpb5j69s3Izdb&index=59>
 - Partial ordningar:
<https://www.youtube.com/watch?v=5JT7y7kdpzNQ&list=PLr8s0R2uMHhPeBOPRhervpb5j69s3Izdb&index=60>
 - Sammansatta relationer:
<https://www.youtube.com/watch?v=O8MifIxxdYo&list=PLr8s0R2uMHhPeBOPRhervpb5j69s3Izdb&index=57>