

TDDC75 – Föreläsning 5

2025 HT1

Szilvia Varro-Gyapay (email: szilvia.varro-gyapay@liu.se)

Baserat på föreläsningarna av Mikael Asplund och boken [Asratian et al.](#)

Mängdlära (forts.)

Definition 1. Mängden av alla tänkbara element kallas *universum* och skrivs $\mathcal{U}$.

Definition 4. Två mängder A och B är *disjunkta* om $A \cap B = \emptyset$.

Definition 7. *Potensmängden* av A är mängden av alla delmängder till A . Skrivs 2^A (eller ibland $\wp(A)$).

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Sats 1. *Tomma mängden är en delmängd till alla mängder.*

Bevis: Låt S vara en godtycklig delmängd av $\mathcal{U}$, och x ett godtyckligt element i universumet.

1. Per definition av tomma mängden: $x \notin \emptyset$, dvs. $\neg(x \in \emptyset)$
2. Per definition an delmängd ($A \subseteq B$): om $x \in A$ så är $x \in B$, dvs. $(x \in A) \rightarrow (x \in B)$. Tillämpa till $\emptyset$ och S : om vi kan bevisa att för varje x i $\emptyset$ gäller att $x \in S$, dvs. att $(x \in \emptyset) \rightarrow x \in S$ är sant, får vi att $\emptyset \subseteq S$.
3. På grund av 1. blir förledet av implikationen falskt då blir hela implikationen sant som medgör att tomma mängden är en delmängd till S vilket skulle visas.

Ett andra sätt skulle vara att vi använder deduktion i steg 3. Eftersom vi vet att $\neg(x \in \emptyset)$ är sant, är det en premiss.

- | | | |
|-----|---|---------------------------------|
| (1) | $\neg(x \in \emptyset)$ | Premiss |
| (2) | $\neg(x \in \emptyset) \vee (x \in S)$ | (1) och Disjunktiv förstärkning |
| (3) | $\neg(\neg(x \in \emptyset)) \rightarrow (x \in S)$ | (2) och Implikationslagen |
| (4) | $(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in S)$ | (3) och Dubbelnegation |
- VSV.

Mängdoperationer

Definition 2. *Komplementet* av A relativt $\mathcal{U}$ är $\mathcal{U} \setminus A$ (skrivs $\bar{A}$).

Definition 3. Om A och B är mängder så är *snittet* mellan A och B mängden av alla element som tillhör både A och B . Skrivs $A \cap B$, dvs.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \in B\}$$

Definition 5. *Unionen* av A och B är mängden av alla element som ingår i A eller B (eller båda). Skrivs $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$$

Definition 6. *Differensen* mellan A och B är mängden av alla element som tillhör A men inte B . Skrivs $A - B$ eller $A \setminus B$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ och } x \notin B\}$$

Likheter inom mängdläran

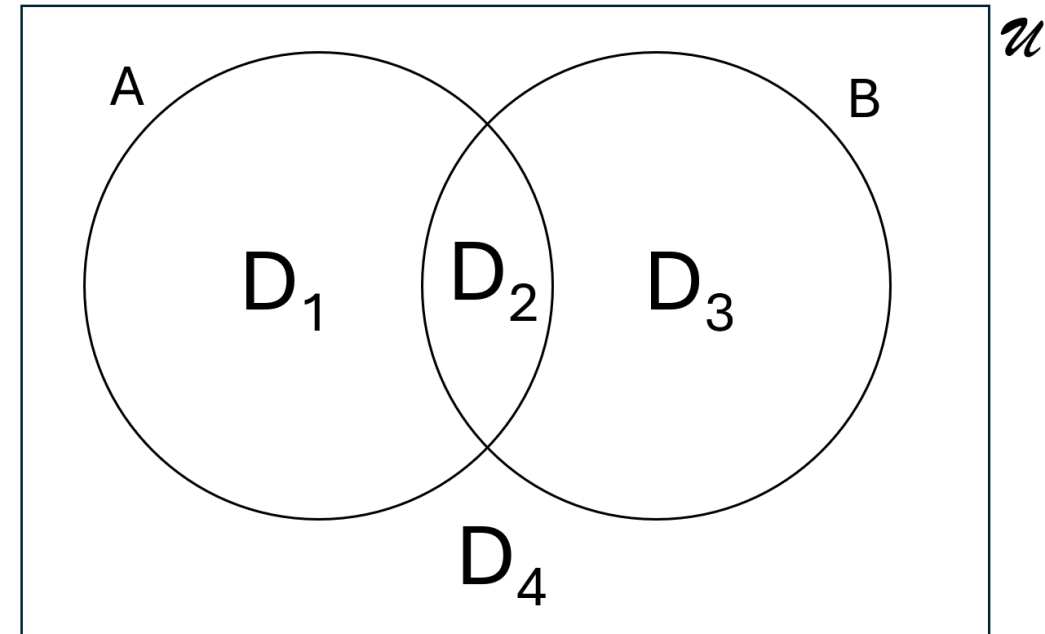
Låt A , B och C beteckna godtyckliga delmängder till ett givet universum $\mathcal{U}$. Då gäller följande likheter:

Regel	Benämning
$\overline{\overline{A}} = A$	Lagen om dubbelt komplement
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgans lagar
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativa lagarna
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Associativa lagarna
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributiva lagarna
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotens
$A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identitetslagarna
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Dominans
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Inversa lagarna
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionslagar
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Differenslagen

Venn diagram, medlemskapstabell

Medlemskapstabell och Venn diagram: ett godtyckligt element kan tillhöra A, B, båda, eller ingen av dem.

Område	Element	Element i A	Element i B
D_2	$x \in A, x \in B$	1	1
D_1	$x \in A, x \notin B$	1	0
D_3	$x \notin A, x \in B$	0	1
D_4	$x \notin A, x \notin B$	0	0



Lycka till med kursen!

www.liu.se