

# Lösningssförslag till tenta i Diskreta strukturer

## 2025-10-27

Kom ihåg att det finns flera sätt att lösa vissa av uppgifterna, och man kan få poäng för andra korrekta lösningar.

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningssförslagen, skicka ett mejl till [szilvia.varro-gyapay@liu.se](mailto:szilvia.varro-gyapay@liu.se). Frågor eller funderingar är också välkomna!

1. En möjlig seminarieuppläggning med TDDC75 skulle vara att ha endast två seminarier med regeln att man kan få antingen 0 eller 1 poäng per seminarium, och att man blir godkänd med 1 eller 2 poäng som totalt.

(OBS! Notationen  $VL \equiv HL$  betyder att VL och HL är logiskt ekvivalenta formler. I tidigare tentor har symbolen  $\leftrightarrow$  använts för logisk ekvivalens.)

Låt  $a$  och  $b$  vara satsvariabler enligt följande villkor:

- Satsvariabeln  $a$  är sann om man får 1 poäng på seminarium A och falsk om man där får 0 poäng.
  - Satsvariabeln  $b$  är sann om man får 1 poäng på seminarium B och falsk om man där får 0 poäng.
  - Låt  $g_1$  vara en satslogisk formel. Låt  $g_1$  vara sann om man får 1 poäng som summa på de två seminarierna och falsk om man inte får 1 poäng totalt.
  - Låt  $g_2$  vara en satslogisk formel. Låt  $g_2$  vara sann om man får 2 poäng som summa på de två seminarierna och falsk om man inte får 2 poäng totalt.
- (a) Skapa en satslogisk formel för  $g_2$  som uttrycker när man blir godkänd med 2 poäng, med hjälp av de satslogiska variablerna  $a$  och  $b$ :  
 $g_2 \equiv \dots$
  - (b) Skapa en satslogisk formel för  $g_1$  som uttrycker när man blir godkänd med 1 poäng, med hjälp av de satslogiska variablerna  $a$  och  $b$ :  
 $g_1 \equiv$
  - (c) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln:  $(g_2 \rightarrow \neg g_1)$ .
  - (d) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att om  $g_1$  är sant så blir  $g_2$  falsk.  
Det vill säga att  $g_1$  är vår enda premiss, och  $\neg g_2$  kan deduceras från den.

Lösningssförslag:

- (a) man blir godkänd med 2 poäng om och endast om man får 1 poäng på båda seminarier, dvs. både  $a$  och  $b$  är sanna:  $g_2 \equiv a \wedge b$
- (b) man blir godkänd med 1 poäng om och endast om man får 1 poäng antingen på det första eller det andra seminariet (uteslutande eller), dvs. exakt en av  $a$  och  $b$  är sann:  $g_1 \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ . Andra formler som  $\neg(a \leftrightarrow b)$  också är rätt.
- (c) För att skapa sanningstabellen för  $g_2 \rightarrow \neg g_1$  får vi ersätta  $g_1$  och  $g_2$  med ovanstående formler som använder  $a$  och  $b$  som satsvariabler, dvs.  
 $g_2 \rightarrow \neg g_1 \equiv ((a \wedge b) \rightarrow \neg((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)))$

| $a$ | $b$ | $g2 \equiv a \wedge b$ | $a \wedge \neg b$ | $\neg a \wedge b$ | $g1 \equiv (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ | $\neg g1$ | $(g2 \rightarrow \neg g1)$ |
|-----|-----|------------------------|-------------------|-------------------|------------------------------------------------------|-----------|----------------------------|
| 1   | 1   | 1                      | 0                 | 0                 | 0                                                    | 1         | 1                          |
| 1   | 0   | 0                      | 1                 | 0                 | 1                                                    | 0         | 1                          |
| 0   | 1   | 0                      | 0                 | 1                 | 1                                                    | 0         | 1                          |
| 0   | 0   | 0                      | 0                 | 0                 | 0                                                    | 1         | 1                          |

(d) Satslogisk deduktion för  $g1 \models \neg g2$ .

(OBS! I tidigare har symbolen  $\Rightarrow$  använts för logisk konsekvens i stället för  $\models$ .)

Satslogisk deduktion för  $g1 \models \neg g2$  är samma som

$((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)) \models \neg(a \wedge b)$ .

- |     |                                                                     |                                                     |
|-----|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| (1) | $((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b))$                        | Premiss                                             |
| (2) | $((a \wedge \neg b) \vee \neg a) \wedge ((a \wedge \neg b) \vee b)$ | (1) och Distributiva lagen                          |
| (3) | $((a \wedge \neg b) \vee \neg a)$                                   | (2) och Konjunktiv förenkling                       |
| (4) | $((a \vee \neg a) \wedge (\neg b \vee \neg a))$                     | (3) och Distributiva lagen                          |
| (5) | $1 \wedge (\neg b \vee \neg a)$                                     | (8) och Inversa lagen                               |
| (6) | $(\neg b \vee \neg a)$                                              | (9) och Identitetslagen                             |
| (7) | $\neg(b \wedge a)$                                                  | (10), och De Morgans lagen (och kummutativa lagen). |

Av steg (1)-(7) följer att  $g1 \models \neg g2$ . VSV.

2. Låt  $A$ ,  $B$ , och  $C$  vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder och låt  $\mathcal{U}$  vara ett universum sådant att  $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ . Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

(a)  $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap ((A \cup B) \cap C) = (\overline{A} \cap \overline{C}) \cap ((A \cup C) \cap B)$

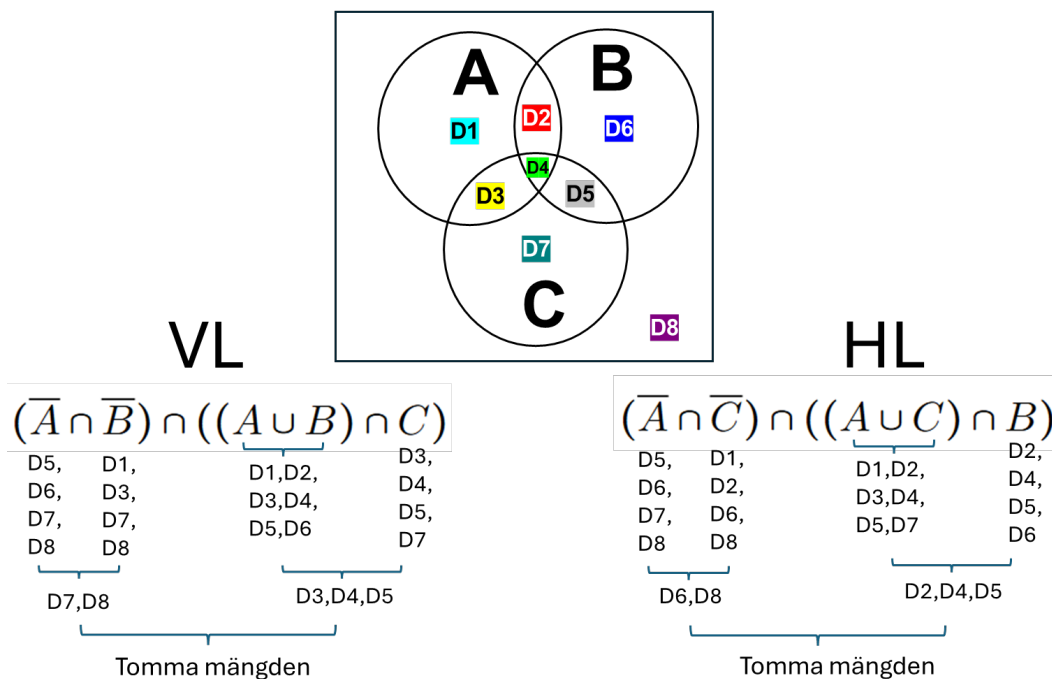
(b)  $B \setminus (C \setminus A) \subseteq B \setminus A$

(c)  $(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap B)$

(d)  $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \setminus B}$

(e)  $2 \cdot |A| < |A \cup B| + |A \cap B|$

Lösningssförslag:



(a) Det gäller alltid.

- Låt oss visa att påståendet alltid gäller först med hjälp av Venn-diagramm.  
Genom att betrakta de områdena i Venn-diagrammen får vi att inga område ingår i både VL och HL, alltså båda är lika med tomma mängden, och därför är de lika med varandra oavsett vilka mängder A, B och C är (se Figur 1).
- Vi kan visa det genom omskrivningar också.  

$$(\overline{A \cap B}) \cap ((A \cup B) \cap C) = (\overline{A \cap C}) \cap ((A \cup C) \cap B)$$

$$VL = (\overline{A \cap B}) \cap ((A \cup B) \cap C) = \text{/De Morgans/} = (\overline{A \cup B}) \cap ((A \cup B) \cap C) = \text{/Associativa lagarna/} =$$

$$(\overline{A \cup B} \cap (A \cup B)) \cap C = \text{/Inversa lagarna för } A \cup B/ = \emptyset \cap C = \emptyset.$$
Eftersom högerledet är samma som VL där B och C är ombytta får vi tomma mängden för HL också som medför att VL=HL.  
Alltså stämmer påståendet alltid.

(b) Det gäller ibland.

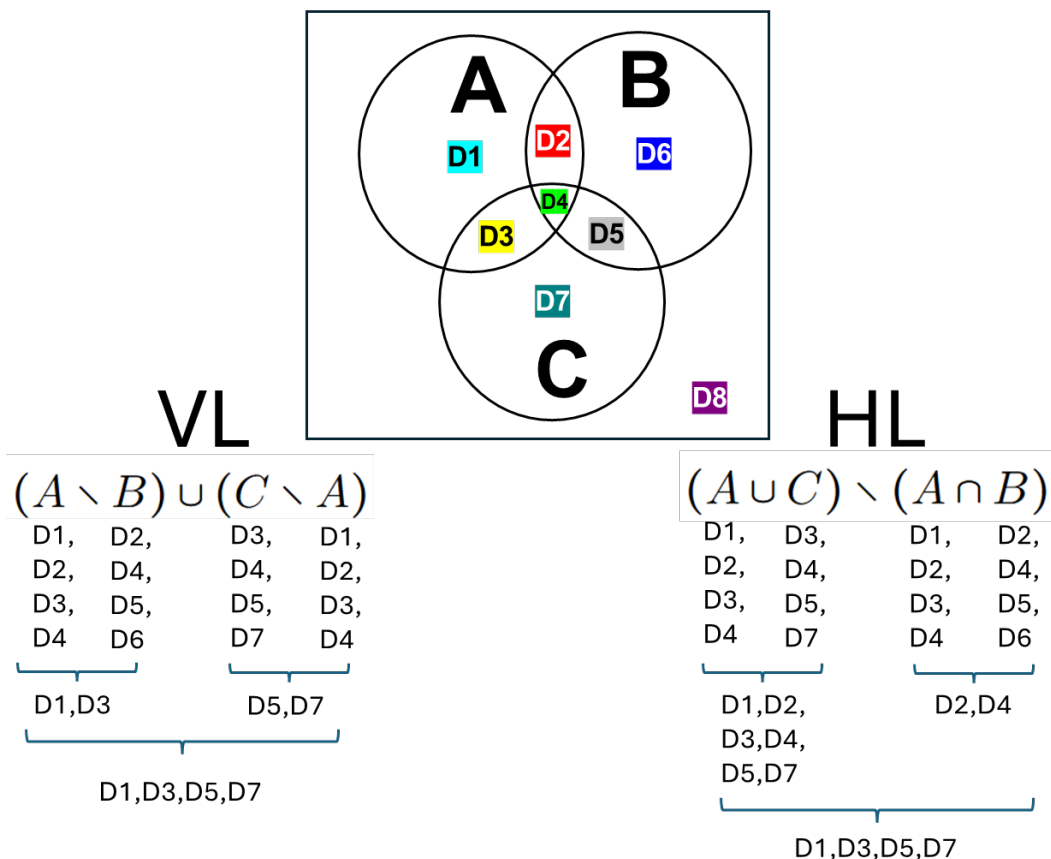
Anta att  $A = \{1\}$ ,  $B = C = \{1, 2\}$ . Så är  $C \setminus A = \{2\}$  och därför  $VL = B \setminus \{2\} = \{1\}$  medan  $HL = B \setminus A = \{2\}$  vilket innebär att  $VL \not\subseteq HL$ .

Däremot, om  $A = \{1\}$ ,  $B = C = \{2\}$ , så är  $C \setminus A = \emptyset$  och därför  $VL = B \setminus \emptyset = \{2\}$  medan  $HL = B \setminus A = \{2\}$  vilket innebär att  $VL \subseteq HL$ .

(c) Det gäller alltid.

Låt oss visa att påståendet alltid gäller först med hjälp av Venn-diagramm.

Genom att betrakta de områdena i Venn-diagrammen får vi att områdena D1, D3, D5, D7 ingår i både VL och HL, och därför är de lika med varandra (se Figur 2).



(d) Det gäller ibland.

Anta att  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{3\}$ . Så är  $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ,  $2^B = \{\emptyset, \{3\}\}$  vilket medför att  $VL = 2^A \setminus 2^B = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . Samtidigt är  $HL = 2^{A \setminus B} = 2^{\{1, 2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  vilket är lika med VL, alltså påståendet stämmer i detta fall.

Däremot, om  $A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ , så är  $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, 2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$  vilket medför att  $VL = 2^A \setminus 2^B = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$ . Samtidigt är  $HL = 2^{A \setminus B} = 2^{\{2\}} = \{\emptyset, \{2\}\}$  där  $VL \neq HL$ , alltså påståendet stämmer inte i detta fall.

(e) Det gäller ibland.

Anta att  $A = B = \{1\}$ . Så är  $|A| = 1, |A \cup B| = |\{1\}| = 1, |A \cap B| = |\{1\}| = 1$ , vilket medför att  $VL = 2 \cdot |A| = 2 \cdot 1 = 2$  och att  $HL = |A \cup B| + |A \cap B| = 1 + 1 = 2$  där  $VL = 2 < 2 = HL$  stämmer inte.

Däremot, om  $A = \{1\}$  och  $B = \{1, 2\}$ , så är  $|A| = 1, |A \cup B| = |\{1, 2\}| = 2, |A \cap B| = |\{1\}| = 1$ , vilket medför att  $VL = 2 \cdot |A| = 2 \cdot 1 = 2$  och att  $HL = |A \cup B| + |A \cap B| = 2 + 1 = 3$  där  $VL = 2 < 3 = HL$  stämmer.

3. (a) Låt mängden  $A = \{-2, -1, 0, 1\}$  och relationen  $R \subseteq A \times A$  vara definierad som:  
 $R = \{(a, b) : a \cdot b \geq 0\}$  (dvs. alla par där produkten av två element inte är negativ).  
 Skriv upp alla par  $(a, b)$  som ingår i relationen  $R$ .
- (b) Avgör för relationen  $R$  om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.
- (c) Bestäm det transitiva höljet för relationen  $R$ .

Lösningsförslag.

- (a) Låt oss börja med  $-2$  och undersöka vilka andra element kan vi para ihop det för att få en icke-negativ produkt.

- $(-2) \cdot (-2) = 4$  dvs.  $(-2, -2)$  ingår i relationen
- $(-2) \cdot (-1) = 2$  dvs.  $(-2, -1)$  ingår i relationen
- $(-2) \cdot 0 = 0$  dvs.  $(-2, 0)$  ingår i relationen
- $(-2) \cdot 1 = -2$  dvs.  $(-2, 1)$  ingår INTE i relationen.

Om vi betraktar de andra element i  $A$  på samma sätt får vi att även

- för  $-1$  ingår  $(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0)$  i relationen
- för  $0$  ingår  $(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1)$  i relationen, och
- för  $1$  ingår  $(1, 0), (1, 1)$  i relationen.

Alltså

$$R = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

- (b)
- En relation är reflexiv om för alla  $x \in A : (x, x) \in R$ .  
 Eftersom  $(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1)$  tillhör  $R$ , är  $R$  reflexiv.
  - En relation är symmetrisk om  $(x, y) \in R$  innebär att  $(y, x) \in R$  också för alla  $x, y \in A$ .  
 Detta gäller för denna relation eftersom om  $(x, y)$  är med i relationen innebär det att  $x \cdot y \geq 0$ , och eftersom multiplikation är kommutativ, gäller också att  $y \cdot x \geq 0$ .  
 Därför är  $(y, x)$  också med i relationen, och relationen är symmetrisk. (Man kan också kontrollera detta genom att gå igenom element och se om det finns omvända par också.)
  - En relation är antisymmetrisk om för alla  $x, y \in A$  om  $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ , då måste vara  $x = y$ . Eftersom t.ex. både  $(-2, -1)$  och  $(-1, -2)$  tillhör relationen men  $-2 \neq -1$  är relationen inte antisymmetrisk.
  - En relation är transitiv om för alla  $(x, y), (y, z) \in R$  gäller att  $(x, z) \in R$ . Eftersom både  $(-2, 0)$  och  $(0, 1)$  tillhör relationen men  $(-2, 1)$  tillhör inte relationen är relationen inte transitiv.
- (c) Vi kan beräkna transitiva höljet för relationen med den iterativa metoden.
- $S_0 = R =$   
 $\{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

- Varje rad visar de paren som man får när ett par  $(x, y)$  tas från  $R$  och kombineras med ett par  $(y, z)$  från  $R$ . T.ex. den första raden  $(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0)$  får vi genom att välja  $(-2, -2)$  (som  $(x, y)$ ) och sen applicera de paren som börjar med  $-2$ :  $(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0)$  (som  $(y, z)$ ).

$$\begin{aligned}
 S_1 &= (R \circ S_0) \cup S_0 = \\
 &\{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), \\
 &(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), \\
 &(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), \\
 &(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), \\
 &(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), \\
 &(-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), \\
 &(0, -2), (0, -1), (0, 0), \\
 &(0, -2), (0, -1), (0, 0), \\
 &(0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), \\
 &(0, 0), (0, 1), \\
 &(1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), \\
 &(1, 0), (1, 1)\} \cup S_0 = \\
 &\{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -2), (0, -1), (0, 0), \\
 &(0, 1), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}
 \end{aligned}$$

Observera att  $S_1$  är lika med  $A \times A$ . Det innebär att alla möjliga par som vi kan få genom att fortsätta iterativa metoden är redan med  $S_1$  som garanterar att  $S_2 = S_1$  alltså transitiva höljet är lika med  $S_1$ , dvs.

$$R^+ = \{(-2, -2), (-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-1, -2), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

4. Låt oss definiera en funktion som  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$  som

$$f(m) = \frac{1}{m^2 + 1},$$

där  $\mathbb{Z}$  står för heltal, och  $\mathbb{Q}^+$  står för positiva rationella tal.

- Ange värdena  $f(-5), f(-2), f(0), f(1)$  och  $f(4)$ .
- Visa att  $f$  inte är injektiv.
- Visa att  $f$  inte är surjektiv.
- Låt oss ändra domänen till  $\mathbb{N}$  (medan målmängden fortfarande är  $\mathbb{Q}^+$  och där  $\mathbb{N}$  står för de naturliga talen). Har vi fortfarande en funktion? Om ja, bestäm om den nya funktionen är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.
- Låt oss ändra domänen till  $\mathbb{R}^+$  och målmängden till  $\mathbb{R}^+$ , där  $\mathbb{R}^+$  står för de positiva reella talen. Har vi fortfarande en funktion? Om ja, bestäm om den nya funktionen är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

Lösningsförslag.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(-5) &= \frac{1}{26} \\
 f(-2) &= \frac{1}{5} \\
 f(0) &= 1 \\
 f(1) &= \frac{1}{2} \\
 f(4) &= \frac{1}{17}
 \end{aligned}$$

- En funktion är injektiv om  $f(x) = f(y)$  så är  $x = y$ . Låt oss anta att  $f(m) = f(n)$  för några  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Detta innebär att  $\frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{n^2+1}$ . Låt oss multiplicera båda sidorna med  $m^2 + 1$  och  $n^2 + 1$  så vi får  $n^2 + 1 = m^2 + 1$ . Det medför att  $n^2 = m^2$ . Om vi väljer  $m = 1$  och  $n = -1$  blir ekvationen sant, alltså har vi hittat två annorlunda  $m$  och  $n$  i  $\mathbb{Z}$  för vilka får vi samma bild i målmängden. Därmed är funktionen inte injektiv.

- (c) En funktion  $f : A \rightarrow B$  är surjektiv om det för varje  $y \in B$  finns minst ett  $x \in A$  sådant att  $f(x) = y$ . Låt oss betrakta  $f(2)$  och  $f(3)$ :  $f(2) = \frac{1}{5}$ ,  $f(3) = \frac{1}{10}$ . Nämnaren i  $f(n)$  ökar när  $n$  ökar om  $n \geq 0$ . Låt oss undersöka om det finns ett heltal  $n$  sådant att bild av  $n$  är lika med  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}^+$  (vi väljer  $\frac{1}{3}$  eftersom det är mellan  $f(1) = \frac{1}{2}$  och  $f(2) = \frac{1}{5}$ ).

Dvs.  $f(n) = \frac{1}{3}$ , dvs.  $\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{3}$ . Låt oss lösa den här ekvationen genom att multiplicera båda sidor med  $3(n^2+1)$ :

$$3 = n^2 + 1$$

$2 = n^2$ , från vilket får vi att  $n = \pm\sqrt{2}$  vilka inte är heltal, alltså det finns ingen Urbild för  $\frac{1}{3}$  vilket medför att funktionen inte är surjektiv.

- (d) Definitionen för funktionen är att varje element i domänen har exakt en bild i målmängden. Om domänen är  $\mathbb{N}$ , bråket  $f(n) = \frac{1}{n^2+1}$  är definierat för alla  $n \in \mathbb{N}$  eftersom nämnare är alltid större eller lika med 1. Dessutom är nämnaren alltid positiv vilket medför att  $f(n)$  är ett rationellt tal och tillhör målmängden.

Alltså blir den nya avbildningen en funktion.

- Den nya funktionen är injektiv eftersom om  $f(m) = f(n)$  (se del b)) får vi att  $n^2 = m^2$  då måste vara  $n = m$  eftersom båda måste vara positiva eller 0 (domänen är mängd av naturliga tal).
- Den nya funktionen är inte surjektiv på grund av samma argument som vi har visat i b).
- Eftersom funktionen inte är surjektiv är funktionen inte bijektiv heller.

- (e) Om både domänen och målmängden är  $\mathbb{R}^+$  får vi också en funktion eftersom bråket  $\frac{1}{n^2+1}$  är definierat för varje element i  $\mathbb{R}^+$  och bråkets nämnare är ett reellt tal därför är bråket också ett reellt tal som tillhör målmängden.

- Funktionen är injektiv av samma skäl som tidigare.
- Låt oss betrakta om vi kan hitta ett  $x \in \mathbb{R}^+$  för varje  $y \in \mathbb{R}^+$  så att  $f(x) = y$ . Låt oss anta att för ett godtyckligt  $y \in \mathbb{R}^+$  det finns ett  $x \in \mathbb{R}^+$  så att  $y = \frac{1}{x^2+1}$ . Låt oss lösa den här ekvationen.

$$y \cdot (x^2 + 1) = 1$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{y}. \text{ Observera att det är tillåtet att dividera med } y \text{ eftersom } y \text{ är positiv.}$$

$$x^2 = \frac{1}{y} - 1$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

$x$  finns inte om  $\frac{1}{y} - 1 < 0$ , dvs.  $\frac{1}{y} < 1$ ,  $1 < y$ . (Det är tillåtet att multiplicera med  $y$  och riktningen av olikhetstecken ändras inte eftersom  $y \in \mathbb{R}^+$ ). Det medför att funktionen inte är surjektiv.

- Eftersom funktionen inte är surjektiv är funktionen inte bijektiv heller.

5. Bevisa med hjälp av induktion att  $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$  för alla heltal  $n \geq 1$ .

Lösningsförslag.

Bevis:

Låt  $P(n)$  vara påståendet att  $P(n) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ . Vi ska visa att  $P(n)$  är sant för alla  $n \geq 1$

Bassteget:

Först visar vi att  $P(1)$  är sant för  $n = 1$ .  $P(1)$  gäller eftersom

$$P(1) : 1 \cdot 3 = 3 = \frac{1 \cdot (4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1)}{3}$$

Induktionssteget:

Anta att  $P(k) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2k-1) \cdot (2k+1) = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3}$  sant för något  $k \geq 1$ .

Vi ska nu visa att detta medför att  $P(k+1)$  är sant, dvs.

$$P(k+1) : 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1) = \frac{(k+1)(4(k+1)^2+6(k+1)-1)}{3} \text{ gäller.}$$

Låt oss börja med vänsterledet.

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2k-1) \cdot (2k+1) + (2(k+1)-1) \cdot (2(k+1)+1) = \\
 & = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2k-1) \cdot (2k+1) + (2k+2-1) \cdot (2k+2+1) = \\
 & = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2k-1) \cdot (2k+1) + (2k+1) \cdot (2k+3) = \text{/enligt induktionsantagande/} = \\
 & = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + (2k+1) \cdot (2k+3) = \\
 & = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + 4k^2 + 8k + 3 = \\
 & = \frac{k(4k^2+6k-1)+3(4k^2+8k+3)}{3} = \\
 & = \frac{4k^3+6k^2-k+12k^2+24k+9}{3} = \\
 & = \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}
 \end{aligned}$$

Låt oss räkna ut högerledet.

$$\begin{aligned}
 \text{HL} &= \frac{(k+1)(4(k+1)^2+6(k+1)-1)}{3} = \\
 &= \frac{(k+1)(4k^2+8k+4+6k+6-1)}{3} = \\
 &= \frac{(k+1)(4k^2+14k+9)}{3} = \\
 &= \frac{4k^3+14k^2+9k+4k^2+14k+9}{3} = \\
 &= \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}.
 \end{aligned}$$

Vi får från de båda två beräkningarna att  $VL = HL$ .

Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller  $P(n)$  för alla heltal  $n \geq 1$ .

6. Låt  $A$  vara mängden  $A = \{a, b, c, d\}$ .

Låt  $R$  och  $S$  vara två relationer över  $A \times A$ :

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\},$$

$$S = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}.$$

- Är  $R$  en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv) eller en ekvivalensrelation (en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
- Är  $S$  en partialordning eller en ekvivalensrelation? Motivera ditt svar.
- Skapa sammansättningen  $R \circ S$ .
- Skapa sammansättningen  $S \circ R$ .
- Är sammansättningarna partialordningar eller ekvivalensrelationer? Motivera ditt svar.

Lösningsförslag.

- En relation är reflexiv om för alla  $x \in A : (x, x) \in R$ . Eftersom  $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in R$  är  $R$  reflexiv.

En relation är antisymmetrisk om för alla  $x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$  medför att  $x = y$ . Eftersom  $(a, b), (b, c), (c, a), (d, b)$  finns i  $R$ , men  $(b, a), (c, b), (a, c), (b, d)$  finns inte i  $R$  är  $R$  antisymmetrisk.

En relation är transitiv om för alla  $(x, y), (y, z) \in R$  gäller att  $(x, z) \in R$ . Eftersom  $(a, b)$  och  $(b, c) \in R$  men  $(a, c) \notin R$ , är  $R$  inte transitiv.

Därför är  $R$  inte en partialordning, och är inte ekvivalensrelation heller.

- Relationen  $S$  är reflexiv eftersom  $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in S$ .

Relationen  $S$  är inte antisymmetrisk eftersom både  $(a, b)$  och  $(b, a) \in S$ .

Relationen  $S$  är symmetrisk eftersom både  $(a, b)$  och  $(b, a) \in S$ ,  $(a, d)$  och  $(d, a) \in S$ ,  $(b, d)$  och  $(d, b) \in S$ .

Relationen  $S$  är transitiv eftersom för  $(a, b), (b, a)$  finns  $(a, a) \in S$ , för  $(a, b), (b, d)$  finns  $(a, d) \in S$ , för  $(a, d), (d, a)$  finns  $(a, a) \in S$ , för  $(a, d), (d, b)$  finns  $(a, b) \in S$ , för  $(b, a), (a, b)$  finns  $(b, b) \in S$ , för  $(b, a), (a, d)$  finns  $(b, d) \in S$ , för  $(b, d), (d, a)$  finns  $(b, a) \in S$ , för  $(b, d), (d, b)$  finns  $(b, b) \in S$ , för  $(d, a), (a, b)$  finns  $(d, b) \in S$ , för  $(d, a), (a, d)$  finns  $(d, d) \in S$ , för  $(d, b), (b, a)$

finns  $(d, a) \in S$  och för  $(d, b), (b, d)$  finns  $(d, d) \in S$  (alla andra fall är triviala). Alltså relationen är transitiv.

Eftersom  $S$  inte är antisymmetrisk är den inte en partialordning, men eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv är den en ekvivalensrelation.

- (c) Vi gå igenom varje par  $(x, y)$  i  $S$  och parar ihop med alla möjliga par  $(y, z)$  i  $R$  och lägga till  $(x, z)$ :

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(a, a), (a, b), (a, b), (a, c), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, b), (b, c), (b, b), (b, d), \\ &(c, a), (c, c), (d, a), (d, b), (d, b), (d, c), (d, b), (d, d)\} = \\ &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\} \end{aligned}$$

- (d)  $S \circ R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (b, c), (c, a), (c, b), (c, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d), (d, a), (d, b), (d, d)\} =$   
 $= \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}.$

- (e) Relationen  $R \circ S$  är reflexiv eftersom  $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in R \circ S$ , inte antisymmetrisk eftersom både  $(a, b)$  och  $(b, a) \in R \circ S$ , inte symmetrisk eftersom  $(b, c) \in R \circ S$  men  $(c, b) \notin R \circ S$ , därför är  $R \circ S$  inte en partialordning eller en ekvivalensrelation.

Relationen  $S \circ R$  är reflexiv eftersom  $(a, a), (b, b), (c, c), (d, d) \in S \circ R$ , inte antisymmetrisk eftersom både  $(a, b)$  och  $(b, a) \in S \circ R$ , inte symmetrisk eftersom  $(c, a) \in S \circ R$  men  $(a, c) \notin S \circ R$ , därför är  $S \circ R$  inte en partialordning eller en ekvivalensrelation.