

Tentamen i Diskreta strukturer

Kurskod	TDDC75
Datum	2025-10-27
Modul	TEN2

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Szilvia Varro-Gyapay, 013284092.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. En möjlig seminarieuppläggning med TDDC75 skulle vara att ha endast två seminarier med regeln att man kan få antingen 0 eller 1 poäng per seminarium, och att man blir godkänd med 1 eller 2 poäng som totalt.

(OBS! Notationen $VL \equiv HL$ betyder att VL och HL är logiskt ekvivalenta formler. I tidigare tentor har symbolen $\Leftrightarrow$ använts för logisk ekvivalens.)

Låt a och b vara satsvariabler enligt följande villkor:

- Satsvariabeln a är sann om man får 1 poäng på seminarium A och falsk om man där får 0 poäng.
 - Satsvariabeln b är sann om man får 1 poäng på seminarium B och falsk om man där får 0 poäng.
 - Låt g_1 vara en satslogisk formel. Låt g_1 vara sann om man får 1 poäng som summa på de två seminarierna och falsk om man inte får 1 poäng totalt.
 - Låt g_2 vara en satslogisk formel. Låt g_2 vara sann om man får 2 poäng som summa på de två seminarierna och falsk om man inte får 2 poäng totalt.
- (a) Skapa en satslogisk formel för g_2 som uttrycker när man blir godkänd med 2 poäng, med hjälp av de satslogiska variablerna a och b :
 $g_2 \equiv \dots$
- (b) Skapa en satslogisk formel för g_1 som uttrycker när man blir godkänd med 1 poäng, med hjälp av de satslogiska variablerna a och b :
 $g_1 \equiv$
- (c) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln: $(g_2 \rightarrow \neg g_1)$.
- (d) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att om g_1 är sant så blir g_2 falsk.
Det vill säga att g_1 är vår enda premiss, och $\neg g_2$ kan deduceras från den.

(5 poäng)

2. Låt A , B , och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder och låt $\mathcal{U}$ vara ett universum sådant att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

- (a) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap ((A \cup B) \cap C) = (\overline{A} \cap \overline{C}) \cap ((A \cup C) \cap B)$
- (b) $B \setminus (C \setminus A) \subseteq B \setminus A$
- (c) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A) = (A \cup C) \setminus (A \cap B)$
- (d) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \setminus B}$
- (e) $2 \cdot |A| < |A \cup B| + |A \cap B|$

(5 poäng)

3. (a) Låt mängden $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:
 $R = \{(a, b) : a \cdot b \geq 0\}$ (dvs. alla par där produkten av två element inte är negativ).
 Skriv upp alla par (a, b) som ingår i relationen R .
- (b) Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.
- (c) Bestäm det transitiva höljet för relationen R .

(5 poäng)

4. Låt oss definiera en funktion som $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}^+$ som

$$f(m) = \frac{1}{m^2 + 1},$$

där $\mathbb{Z}$ står för heltal, och $\mathbb{Q}^+$ står för positiva rationella tal.

- (a) Ange värdena $f(-5), f(-2), f(0), f(1)$ och $f(4)$.
- (b) Visa att f inte är injektiv.
- (c) Visa att f inte är surjektiv.
- (d) Låt oss ändra domänen till $\mathbb{N}$ (medan målmängden fortfarande är $\mathbb{Q}^+$ och där $\mathbb{N}$ står för de naturliga talen). Har vi fortfarande en funktion? Om ja, bestäm om den nya funktionen är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.
- (e) Låt oss ändra domänen till $\mathbb{R}^+$ och målmängden till $\mathbb{R}^+$, där $\mathbb{R}^+$ står för de positiva reella talen. Har vi fortfarande en funktion? Om ja, bestäm om den nya funktionen är injektiv, surjektiv, eller bijektiv.

(5 poäng)

5. Bevisa med hjälp av induktion att $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1) \cdot (2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ för alla heltal $n \geq 1$.

(5 poäng)

6. Låt A vara mängden $A = \{a, b, c, d\}$.
 Låt R och S vara två relationer över $A \times A$:
 $R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\},$
 $S = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}.$

- (a) Är R en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv) eller en ekvivalensrelation (en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
- (b) Är S en partialordning eller en ekvivalensrelation? Motivera ditt svar.
- (c) Skapa sammansättningen $R \circ S$.
- (d) Skapa sammansättningen $S \circ R$.
- (e) Är sammansättningarna partialordningar eller ekvivalensrelationer? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

A Formelblad 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser

OBS! I tidigare har symbolen $\Leftrightarrow$ använts för logisk ekvivalens ($\equiv$) och $\Rightarrow$ för logisk konsekvens ($\models$.)

Logiska ekvivalenser

Regel	Benämning
$\neg\neg p \equiv p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$	Kommutativa lagarna
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotens
$p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee 1 \equiv 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \equiv 0$ $p \vee \neg p \equiv 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorption
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen

Logiska konsekvenser

$(p \rightarrow q), p \models q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \models \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \models p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \models p$	Konjunktiv förenkling
$p \models p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \models p$	Disjunktiv syllogism
$(p \vee q), (p \rightarrow r), (q \rightarrow r) \models r$	Ellereliminering
$p, q \models p \wedge q$	Konjunktionsregeln

B Formelblad: Likheter inom mängdläran

Låt A , B och C beteckna godtyckliga delmängder till ett givet universum $\mathcal{U}$ så att $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Då gäller följande likheter:

Regel	Benämning
$\overline{\overline{A}} = A$	Lagen om dubbelt komplement
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgans lagar
$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	Kommutativa lagarna
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Associativa lagarna
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributiva lagarna
$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	Idempotens
$A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identitetslagarna
$A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Dominans
$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Inversa lagarna
$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Absorptionslagar
$A \setminus B = A \cap \overline{B}$	Differenslagen