Tentamen i Diskreta strukturer

Lösningsförslag 2025-08-30

Lösningarna är bara förslag, man kan besvara frågorna på andra sätt eller med andra exemplar naturligtvis. Men resultaten måste vara samma.

1. Ett bibliotek fungerar enligt följande regler:

   R1 Man får låna en bok om och endast om ens lånekort är giltigt och man inte har nått maxgränsen för lånade böcker.

   R2 Man får låna två böcker om och endast om ens lånekort är giltigt och man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker.

   R3 Om man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker, så har man inte nått maxgränsen för lånade böcker.

   Låt $b1$, $b2$, g, $n1$ och $n2$ vara satsvariabler enligt följande villkor:

   - Satsvariabeln $b1$ är sann om man får låna en bok, och falsk om man inte får låna en bok.
   - Satsvariabeln $b2$ är sann om man får låna två böcker, och falsk om man inte får låna två böcker.
   - Satsvariabeln g är sann om ens lånekort är giltigt, och falsk om ens lånekort inte är giltigt.
   - Satsvariabeln $n1$ är sann om man har nått maxgränsen för lånade böcker, och falsk om man inte har nått maxgränsen för lånade böcker.
   - Satsvariabeln $n2$ är sann om man har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker, och falsk om man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker.

   (a) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R1$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $b1 \leftrightarrow \ldots$
   Låt oss kalla denna formel $F1$.

   (b) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R2$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $b2 \leftrightarrow \ldots$
   Låt oss kalla denna formel $F2$.

   (c) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R3$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $\neg n2 \rightarrow \ldots$
   Låt oss kalla denna formel $F3$.

   (d) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln: $(g \wedge b2) \rightarrow (g \wedge b1)$.

   (e) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att om $F1, F2, F3$ och g är sanna och $b1$ är falsk, så blir den satslogiska variabeln $b2$ också falsk. Det vill säga att $F1, F2, F3, g$ och $\neg b1$ är våra premisser, och $\neg b2$ kan deduceras från dem.

   Lösningsförslag.

   (a) $F1 : b1 \leftrightarrow (g \wedge \neg n1)$

   (b) $F2 : b2 \leftrightarrow (g \wedge \neg n2)$

   (c) $F3 : \neg n2 \rightarrow \neg n1$

   (d) Sanningstabellen för $(g \wedge b2) \rightarrow (g \wedge b1)$:

$b1$	$b2$	g	$g \wedge b2$	$g \wedge b1$	$(g \wedge b2) \rightarrow (g \wedge b1)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1

(e) Satslogisk deduktion för $F1, F2, F3, g, \neg b1 \Rightarrow \neg b2$.

(1)	$b1 \leftrightarrow (g \wedge \neg n1)$	Premiss
(2)	$b2 \leftrightarrow (g \wedge \neg n2)$	Premiss
(3)	$\neg n2 \rightarrow \neg n1$	Premiss
(4)	g	Premiss
(5)	$\neg b1$	Premiss
(6)	$(b1 \rightarrow (g \wedge \neg n1)) \wedge ((g \wedge \neg n1) \rightarrow b1)$	(2) och Ekvivalenslagen
(7)	$((g \wedge \neg n1) \rightarrow b1)$	(6) och Konjunktiv förenkling
(8)	$\neg(g \wedge \neg n1)$	(5), (7) och Modus tollens
(9)	$\neg g \vee \neg\neg n1$	(8) och De Morgans lagen
(10)	$\neg g \vee n1$	(9) och Dubbelnegation
(11)	$n1$	(4), (10) och Disjunktiv syllogism
(12)	$\neg\neg n2$	(5), (11) och Modus tollens
(13)	$n2$	(12) och Dubbelnegation
(14)	$n2 \vee \neg g$	(13) och Disjunktiv förstärkning
(15)	$\neg\neg(n2 \vee \neg g)$	(14) och Dubbelnegation
(16)	$\neg(\neg n2 \wedge \neg\neg g)$	(15) och De Morgans lagen
(17)	$\neg(\neg n2 \wedge g)$	(16) och Dubbelnegation
(18)	$(b2 \rightarrow (g \wedge \neg n2)) \wedge ((g \wedge \neg n2) \rightarrow b2)$	(2) och Ekvivalenslagen
(19)	$(b2 \rightarrow (g \wedge \neg n2))$	(19) och Konjunktiv förenkling
(20)	$\neg b2$	(19) och Modus tollens

Av steg (1)-(20) följer att $F1, F2, F3, g, \neg b1 \Rightarrow \neg b2$. VSV.

2. Låt A, B, och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

   (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

   (b) $A \cap B \subseteq A \setminus B$

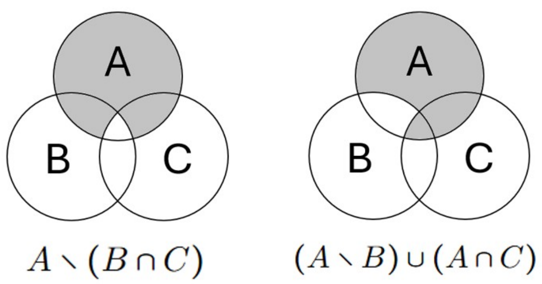
   (c) $\overline{A \cup B} \setminus C = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C$

   (d) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$

   (e) $|A| - |B| \leq |A \setminus B|$

   Lösningsförslag.

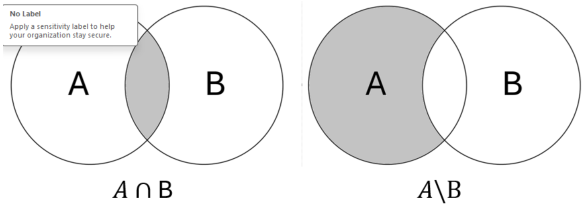
   (a) Det gäller ibland. Låt oss illustrera problemet med hjälp av ett Venn-diagram för att avgöra



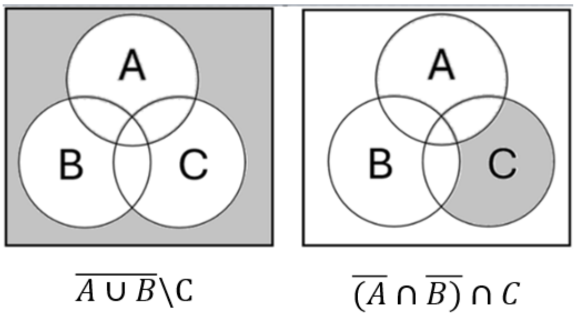
Figur 1: 2a

om de två sidorna är lika (se figur 1).

Det framgår tydligt att de två gråa områden inte är samma vilket innebär att svaret kommer att vara ibland. Låt oss skapa två exempel där ett av dem har några element i skillnadig delen - mängden av element som tillhör både A och B, men inte C.



Figur 2: 2b



Figur 3: 2c

Anta att $A = B = C = \{1\}$. Då är $B \cap C = \{1\}$ och $(A \setminus (B \cap C) = \{1\} \setminus \{1\} = \varnothing$. Samtidigt är $A \setminus B = \varnothing$, $A \cap C = \{1\}$, och $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \{1\} = \{1\}$ vilket innebär att VL inte är lika med HL.

Däremot, om $A = B = \{1\}, C = \{2\}$, så är $B \cap C = \varnothing$ och $(A \setminus (B \cap C) = \{1\} \setminus \varnothing = \{1\}$. Samtidigt är $A \setminus B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, och $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ vilket innebär att VL = HL.

(b) Det gäller ibland.

Låt oss använda samma metod som i lösningen av första uppgiften.

Utifrån Vendiagrammet (se figur 2) framgår det att vänstra ledets och högra ledets områden inte har några gemensamma element. Detta innebär att om VL innehåller minst ett element, så är det inte en delmängd av HL. Om VL däremot är tomma mängden, så är den en delmängd av HL.

Anta att $A = B = \{1\}$. Då är $A \cap B = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{1\} = \varnothing$. Detta innebär att VL $\notin$ HL eftersom $\{1\} \notin \varnothing$

Däremot, om $A = \{1\}$ och $B = \{2\}$, så är $A \cap B = \{1\} \cap \{2\} = \varnothing$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\}$. I detta fall är vänstra ledet en delmängd av högra ledet eftersom tomma mängden är en delmängd av alla mängder, $\varnothing \subseteq \{1\}$.

(c) Det gäller ibland.

Vi använder igen Venndiagram.

Utifrån Venndiagrammet framgår att de två områdena inte är samma om det finns något element i universalmängden som inte tillhör mängderna A, B eller C (se figur 3). Däremot är de två områdena lika om båda är den tomma mängden.

Om $A = B = C = \mathcal{U} = \{1\}$. Då gäller följande:
$\overline{A \cup B} \setminus C = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \{1\} = \overline{\{1\}} \setminus \{1\} = \varnothing \setminus \{1\} = \varnothing$ och $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C = (\overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}) \cap \{1\} = \overline{\{1\}} \cap \{1\} = \varnothing \cap \{1\} = \varnothing$. Detta innebär att VL = HL.

Däremot, om $\mathcal{U} = \{1, 2\}$, $A = B = \{1\}$, och $C = \{2\}$ då gäller följande:
$\overline{A \cup B} \setminus C = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \{2\} = \overline{\{1\}} \setminus \{2\} = \{2\} \setminus \{2\} = \varnothing$ och $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C = (\overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}) \cap \{2\} = \overline{\{1\}} \cap \{2\} = \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$. I detta fall VL $\neq$ HL eftersom $\varnothing \neq \{2\}$.

(d) Det gäller ibland.

Låt oss betrakta mängderna påståendet. Påståendet är falskt om det finns en mängd som är med $2^A \setminus 2^B$ men inte med $2^{A\cap B}$. Eftersom den tomma mängden är med alla potensmängden, måste vi hitta en icke-tomma mängd. En icke-tomma mängd är med $2^A \setminus 2^B$ om det är en delmängd av 2^A men inte en delmängd av 2^B. Det innebär att A har minst ett element som inte tillhör B. Låt oss betrakta vänstra ledet när $A = \{1\}$ och $B = \{2\}$. Då är $2^A = \{\{1\}, \varnothing\}$, $2^A = \{\{2\}, \varnothing\}$, och $2^A \setminus 2^B = \{\{1\}\}$. Samtidigt är högre ledet $2^{A\cap B} = 2^{\{1\}\cap\{2\}} = 2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$. Det innebär att VL är inte lika med HL.

Samtidigt, om $A = B = \{1\}$ då $2^A = 2^B$ då vänstra ledet blir $2^A \setminus 2^B = \varnothing$. Eftersom tomma mängden är en delmängd av alla mängder, gäller påståendet (så länge högre ledet blir en välbildade mängd som det är: $2^{A\cap B} = 2^{\{1\}\cap\{1\}} = 2^{\{1\}} = \{\varnothing, \{1\}\}$.

(e) Det gäller alltid.

Eftersom $A \setminus B$ består av element som tillhör A men inte B, antal element i $A \setminus B$ är antal element i A minus antal element i snitt av A och B: $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$. Då blir vår olikhet $|A| - |B| \leq |A| - |A \cap B|$. Eftersom $A \cap B$ är en delmängd av B har B fler element än $\cap B$ alltså $|A \cap B| \leq |B|$. Det innebär att $|A| - |B|$ blir mindre eller lika med $|A| - |A \cap B|$ eftersom vi subtraherar ett mindre tal från $|A|$ inom det högre ledet. VSV.

3. (a) Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:
$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A$, och $a \cdot b$ är jämn$\}$
Skriv upp alla par (a, b) som ingår i relationen R.

(b) Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.

(c) Bestäm det transitiva höljet för relationen R.

Lösningsförslag.

(a) Vi kan bestämma relationens element på följande sätt. Vi börjar med 1. Med 1 kan vi välja 2 och 4 så att deras produkten blir jämn, vilket innebär att $(1, 2)$ och $(1, 4)$ tillhör relationen. Vi fortsätter med de andra elementen och får då
$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

(b) En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (a, a) \in R$.
Eftersom $(1, 1)$ inte tillhör R, är R inte reflexiv.

En relation är symmetrisk om $(x, y) \in R$ innebär att $(y, x) \in R$ också för alla $x, y \in A$. Detta gäller för denna relation eftersom om (x, y) är med i relationen innebär det att $x \cdot y$ är jämnt, och eftersom multiplikation är kommutativ, gäller också att $y \cdot x$ är jämnt. Därför är (y, x) också med i relationen, och relationen är symmetrisk. (Man kan också kolla det genom att gå igenom element och se om det finns omvända par också.)

En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A$ om $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$, då måste $x = y$. Eftersom både $(1, 2)$ och $(2, 1)$ tillhör relationen är relationen inte antisymmetrisk.

En relation är transitiv om för alla $(x, y), (y, z) \in R$ gäller att $(x, z) \in R$. Eftersom både $(1, 2$ och $(2, 3)$ tillhör relationen men $(1, 3)$ tillhör inte relations är relationen inte transitiv.

(c) Vi kan beräkna transitiva höljet för relationen med den iterativa metoden.

- $S_0 = R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
- $S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4),$
  $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$
  $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 2), (4, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\} \cup S_0 =$

  $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

Eftersom S_1 är lika med $A \times A$ är S_1 den transitiva höljet.

4. Låt oss definiera en funktion som konverterar svenska kronor (heltal) till Euro: $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+$ är definierad enligt $f(n) = 0,09 \cdot n$
där $\mathbb{N}^+$ betecknar de positiva naturliga talen och $\mathbb{Q}$ betecknar de rationella talen.

(a) Ange värdena f(1), f(10) och f(100).

(b) Visa att f är injektiv.

(c) Visa att f inte är surjektiv.

(d) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen blir surjektiv? Motivera ditt svar.

(e) Låt oss ändra målmängden till $\mathbb{N}^+$ (domänen är fortfarande $\mathbb{N}^+$) och definiera funktionen som $f(n) = FLOOR(0,09 \cdot n)$ (Här avrundar $FLOOR$ ett tal till största heltalet som är mindre än eller lika med talet. Var uppmärksam på definitionsmängden och målmängden.) (OBS! Det var inte meningen, men det blev fel med tentauppgiften, nämligen att den inte blir en funktion eftersom $f(1) = FLOOR(0,09 \cdot n) = 0$ men $0 \notin \mathbb{N}^+$. Lösningen har skrivits för funktionen $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$.)
Blir den nya funktionen också injektiv? Motivera ditt svar.

Lösningsförslag.

(a) $f(1) = 0,09, f(10) = 0,9, f(100) = 9$.

(b) En funktion är injektiv om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$. Låt oss anta att $f(n) = f(m)$ för några $n, m \in \mathbb{N}^+$. Detta innebär att $0,09 \cdot n = 0,09 \cdot m$. Vi får dividera båda sidorna och får att $n = m$. Därmed är funktionen injektiv.

(c) En funktion $f : A \to B$ är surjektiv om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$. Låt oss undersöka om det finns ett naturligt tal n i domänen $\mathbb{N}^+$ sådant att $f(n) = 0,05$ där $0,05 \in \mathbb{Q}^+$. Detta innebär att $0,09 \cdot n = 0,05$. Om vi dividera båda sidorna med $0,09$ får vi att $n = 5/9$ vilket inte är ett naturligt tal alltså det finns inte en x i domänen för vilket $f(x) = 0,05$. Därför är f inte surjektiv.

(d) Om domänen består endast av $\{1\}$ och målmängden består endast av $\{0,09\}$ då blir funktionen surjektiv eftersom för alla y i målmängden finns det ett x i domänen så att $f(x) = y$.

(e) Nej, den nya funktionen blir inte injektiv eftersom $f(1) = FLOOR(0,09 \cdot 1) = FLOOR(0,09)$ och $f(2) = FLOOR(0,09 \cdot 2) = FLOOR(0,18) = 0$.

5. Bevisa med hjälp av induktion att $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

   Lösningsförslag.

   Bevis:
   Låt $P(n)$ vara påståendet att $P(n) : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 1$

   Bassteget:
   Först visar vi att $P(1)$ är sant för $n = 1$. Då gäller att
   $P(1) : \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$

   Induktionssteget:
   Anta att $P(k) : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ sant för något $k \geq 0$.

   Vi ska nu visa att detta medför att $P(k+1)$ är sant, dvs.
   $P(k+1) : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2}$ /enligt induktionsantagande/
   $= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)\cdot(k+2)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k\cdot(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)} =$ /eftersom $2 \leq k+1$ vi kan dividera både numerator och denominator med $k+1$/ $\frac{k+1}{(k+2)}$

   Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

6. Låt A vara mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Låt R och S vara två relationer över $A \times A$:
   $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,4), (4,2)\}$,
   $S = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (4,4)\}$.

(a) Är R en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.

(b) Är S en partialordning? Motivera ditt svar.

(c) Skapa sammansättningen $R \circ S$.

(d) Skapa sammansättningen $S \circ R$.

(e) Är sammansättningarna partialordningar? Motivera ditt svar.

Lösningsförslag.

(a) En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (x, x) \in R$. Eftersom $(1, 1) \notin R$ är R inte reflexiv. Därför är R inte en partialordning.

(En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ medför att $x = y$. Eftersom både $(1, 3)$ och $(3, 1)$ finns i R, men $1 \neq 3$ är R inte antisymmetrisk.)

(En relation är transitiv om för alla $(x, y), (y, z) \in R$ gäller att $(x, z) \in R$. Eftersom $(1, 3)$ och $(3, 1) \in R$ men $(1, 1) \notin R$, är R inte transitiv.)

(b) Relationen S är reflexiv eftersom $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in S$.

Relationen S är antisymmetrisk eftersom $(3, 2) \notin S$ trots att $(2, 3) \in S$ och alla andra par i S är av formen (x, x).

Relationen S är transitiv eftersom det enda paret $(2, 2), (2, 3)$ som vi kan använda i transitivitetens definition resulterar i $(2, 3)$ som ingår i S. Alltså är S transitiv och således en partialordning.

(c) $R \circ S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\} =$
$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$

(d) $S \circ R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\} =$
$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$.

(e) Relationen $R \circ S$ är inte reflexiv eftersom $(1, 1) \notin R \circ S$. Därför är $R \circ S$ inte en partialordning.

Relationen $S \circ R$ är inte reflexiv heller, eftersom $(1, 1) \notin S \circ R$. Därför är $S \circ R$ inte en partialordning.