

Tentamen i Diskreta strukturer

Kurskod	TDDC75
Datum	2025-08-30
Modul	TEN2

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jurlärare, Szilvia Varro-Gyapay, 013284092.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. Ett bibliotek fungerar enligt följande regler:

- R1 Man får låna en bok om och endast om ens lånekort är giltigt och man inte har nått maxgränsen för lånade böcker.
- R2 Man får låna två böcker om och endast om ens lånekort är giltigt och man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker.
- R3 Om man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker, så har man inte nått maxgränsen för lånade böcker.

Låt b_1 , b_2 , g , n_1 och n_2 vara satsvariabler enligt följande villkor:

- Satsvariabeln b_1 är sann om man får låna en bok, och falsk om man inte får låna en bok.
 - Satsvariabeln b_2 är sann om man får låna två böcker, och falsk om man inte får låna två böcker.
 - Satsvariabeln g är sann om ens lånekort är giltigt, och falsk om ens lånekort inte är giltigt.
 - Satsvariabeln n_1 är sann om man har nått maxgränsen för lånade böcker, och falsk om man inte har nått maxgränsen för lånade böcker.
 - Satsvariabeln n_2 är sann om man har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker, och falsk om man inte har nått maxgränsen minus ett för lånade böcker.
- (a) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R1$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $b_1 \leftrightarrow \dots$
Låt oss kalla denna formel $F1$.
- (b) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R2$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $b_2 \leftrightarrow \dots$
Låt oss kalla denna formel $F2$.
- (c) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R3$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $\neg n_2 \rightarrow \dots$
Låt oss kalla denna formel $F3$.
- (d) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln: $(g \wedge b_2) \rightarrow (g \wedge b_1)$.
- (e) Använd satslogisk deduktion (med hjälp av reglerna i formelbladet) för att bevisa att om $F1$, $F2$, $F3$ och g är sanna och b_1 är falsk, så blir den satslogiska variabeln b_2 också falsk.
Det vill säga att $F1$, $F2$, $F3$, g och $\neg b_1$ är våra premisser, och $\neg b_2$ kan deduceras från dem.

(5 poäng)

2. Låt A , B , och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

- (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
- (b) $A \cap B \subseteq A \setminus B$
- (c) $\overline{A \cup B} \setminus C = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap C$
- (d) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$
- (e) $|A| - |B| \leq |A \setminus B|$

(5 poäng)

3. (a) Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:
 $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ och } a \cdot b \text{ är jämn}\}$
 Skriv upp alla par (a, b) som ingår i relationen R .
- (b) Avgör för relationen R om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.
- (c) Bestäm det transitiva höljet för relationen R .

(5 poäng)

4. Låt oss definiera en funktion som konverterar svenska kronor (heltal) till Euro: $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ är definierad enligt $f(n) = 0,09 \cdot n$ där \mathbb{N}^+ betecknar de positiva naturliga talen och \mathbb{Q} betecknar de rationella talen.

- (a) Ange värdena $f(1)$, $f(10)$ och $f(100)$.
- (b) Visa att f är injektiv.
- (c) Visa att f inte är surjektiv.
- (d) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen blir surjektiv? Motivera ditt svar.
- (e) Låt oss ändra målmängden till \mathbb{N}^+ (domänen är fortfarande \mathbb{N}^+) och definiera funktionen som $f(n) = \text{FLOOR}(0,09 \cdot n)$ (Här avrundar FLOOR ett tal till största heltalet som är mindre än eller lika med talet. Var uppmärksam på definitionsmängden och målmängden.) Blir den nya funktionen också injektiv? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

5. Bevisa med hjälp av induktion att $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla heltal $n \geq 1$.

(5 poäng)

6. Låt A vara mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
 Låt R och S vara två relationer över $A \times A$:
 $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$,
 $S = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$.

- (a) Är R en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.
- (b) Är S en partialordning? Motivera ditt svar.
- (c) Skapa sammansättningen $R \circ S$.
- (d) Skapa sammansättningen $S \circ R$.
- (e) Är sammansättningarna partialordningar? Motivera ditt svar.

(5 poäng)

A Formelblad: Logiska ekvivalenser och konsekvenser

Regel	Benämning
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen
$(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln