Tentamen i Diskreta strukturer

Lösningsförslag 2025-01-07

Lösningarna är bara förslag, man kan besvara frågorna på andra sätt eller med andra exemplar naturligtvis. Men resultaten måste vara samma.

1. Det finns en kaffemaskin som fungerar enligt följande regler:

   R1 Maskinen kan göra en kopp kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe och det finns ström.

   R2 Maskinen kan göra två koppar kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe och det finns ström.

   R3 Om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe, då finns det tillräckligt med vatten för en kopp kaffe.

   Låt $v1$, $v2$, s, $k1$ och $k2$ vara satsvariabler enligt följande villkor:

   - Satsvariabel $v1$ är sann om det finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe, och falsk om det inte finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe.
   - Satsvariabel $v2$ är sann om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe, och falsk om det inte finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe.
   - Satsvariabel s är sann om det finns ström, och falsk om det inte finns ström.
   - Satsvariabel $k1$ är sann om och endast om det är möjligt att göra en kopp kaffe.
   - Satsvariabel $k2$ är sann om och endast om det är möjligt att göra två koppar kaffe.

   (a) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R1$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $k1 \leftrightarrow \ldots$
   Låt oss kalla den här formeln $F1$.

   (b) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R2$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $k2 \leftrightarrow \ldots$
   Låt oss kalla den här formeln $F2$.

   (c) Komplettera den följande satslogiska formeln enligt regeln $R3$ med hjälp av ovanstående satslogiska variabler: $v2 \rightarrow \ldots$
   Låt oss kalla den här formeln $F3$.

   (d) Skapa en sanningstabell för den nedanstående satslogiska formeln: $(v2 \wedge s) \rightarrow (v1 \wedge s)$.

   (e) Använd satslogisk deduktion och reglerna i formelbladet för att bevisa att om de ovanstående tre satslogiska formlerna $F1, F2, F3$ samt satsvariabel $k2$ är sanna (dvs. de fyra är våra premisser), då är den satslogiska variabeln $k1$ också sann (dvs. $k1$ kan deduceras från $F1$, $F2$, $F3$, och $k2$).

Lösningsförslag.

(a) R1: Maskinen kan göra en kopp kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för en kopp kaffe och det finns ström.
$F1 : k1 \leftrightarrow (v1 \wedge s)$

(b) R2: Maskinen kan göra två koppar kaffe om och endast om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe och det finns ström.
$F2 : k2 \leftrightarrow (v2 \wedge s)$

(c) R3: Om det finns tillräckligt med vatten för två koppar kaffe, då finns det tillräckligt med vatten för en kopp kaffe.
$F3 : v2 \rightarrow v1$

(d) Sanningstabellen för $(v2 \wedge s) \rightarrow (v1 \wedge s)$:

$v1$	$v2$	s	$v2 \wedge s$	$v1 \wedge s$	$(v2 \wedge s) \rightarrow (v1 \wedge s)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

(e) Satslogisk deduktion för $F1, F2, F3, k2 \Rightarrow k1$.

(1)	$k1 \leftrightarrow (v1 \wedge s)$	Premiss
(2)	$k2 \leftrightarrow (v2 \wedge s)$	Premiss
(3)	$v2 \rightarrow v1$	Premiss
(4)	$k2$	Premiss
(5)	$(k2 \rightarrow (v2 \wedge s)) \wedge ((v2 \wedge s) \rightarrow k2)$	(2) och Ekvivalenslagen
(6)	$k2 \rightarrow (v2 \wedge s)$	(5) och Konjunktiv förenkling
(7)	$v2 \wedge s$	(4), (6) och Modus ponens
(8)	$v2$	(7) och Konjunktiv förenkling
(9)	s	(7) och Konjunktiv förenkling
(10)	$v1$	(3), (8) och Modus ponens
(11)	$v1 \wedge s$	(10), (9) och Konjunktionsregeln
(12)	$(k1 \rightarrow (v1 \wedge s)) \wedge ((v1 \wedge s) \rightarrow k1)$	(1) och Ekvivalenslagen
(13)	$(v1 \wedge s) \rightarrow k1$	(11) och Konjunktiv förenkling
(14)	$k1$	(11), (13) och Modus ponens

Av steg (1)-(14) följer att $F1, F2, F3, k2 \Rightarrow k1$. VSV.

2. Låt A, B, och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar (dvs. ge ett bevis om svaret är alltid eller aldrig, och ge två exempel om svaret är ibland: ett för fallet när påståendet är sant och ett för fallet när påståendet är falskt).

(a) $A \smallsetminus (B \cup C) = A \smallsetminus B$

(b) $A \cap B \subseteq A \smallsetminus B$

(c) $\overline{A \cup B} \smallsetminus \overline{C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

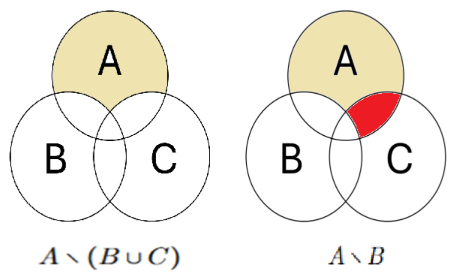
(d) $2^A \subseteq 2^{A \smallsetminus B}$

(e) $|A \smallsetminus B| < |A| + |B|$

Lösningsförslag.

(a) Det gäller ibland.

Låt oss illustrera problemet med hjälp av ett Venn-diagram för att avgöra om de två sidorna är lika (se Figur 1).



Figur 1: $A \smallsetminus (B \cup C)$ och $A \smallsetminus B$

Det framgår tydligt att det röda området ingår i högra ledet men inte i vänstra ledet, vilket innebär att svaret kommer att vara ibland. Venndiagrammet visar att skillnaden mellan de två exemplen måste bestå i att det inte finns några element i röda området i ett fall, medan det finns minst ett element i det andra fallet. Det röda området representerar mängden av element som tillhör både A och C, men inte B.

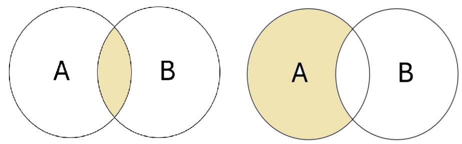
Anta att $A = B = C = \{1\}$. Då är $B \cup C = \{1\}$ och $(A \smallsetminus (B \cup C) = \{1\} \smallsetminus \{1\} = \varnothing$.
Samtidigt är $A \smallsetminus B = \varnothing$, vilket innebär att VL = HL.

Däremot, om $A = C = \{1\}, B = \{2\}$, så är $A \smallsetminus (B \cup C) = \{1\} \smallsetminus \{1, 2\} = \varnothing$ medan $A \smallsetminus B = \{1\} \smallsetminus \{2\} = \{1\}$. I detta fall är VL inte lika med HL, eftersom $\varnothing \neq \{1\}$.

(b) Det gäller ibland.

Låt oss använda samma metod som i lösningen av första uppgiften.

Utifrån Vendiagrammet (se Figur 2) framgår det att vänstra ledets och högra ledets områden inte har några gemensamma element. Detta innebär att om VL innehåller minst ett element, så är det inte



$A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$

Figur 2: $A \cap B$ och $A \setminus B$

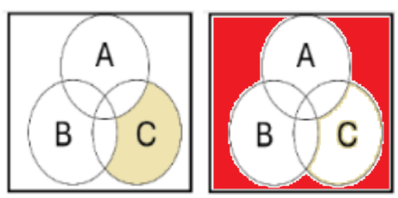
en delmängd av HL. Om VL däremot är tomma mängden, så är den en delmängd av HL.

Anta att $A = B = \{1\}$. Då är $A \cap B = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{1\} = \varnothing$. Detta innebär att VL $\nsubseteq$ HL eftersom $\{1\} \nsubseteq \varnothing$

Däremot, om $A = \{1\}$ och $B = \{2\}$, så är $A \cap B = \{1\} \cap \{2\} = \varnothing$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\}$. I detta fall är vänstra ledet en delmängd av högra ledet eftersom tomma mängden är en delmängd av alla mängder, $\varnothing \subseteq \{1\}$.

(c) Det gäller ibland.

Vi använder igen Venndiagram.



$\overline{A \cup B} \setminus \overline{C}$ $\quad$ $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

Figur 3: $\overline{A \cup B} \setminus \overline{C}$ och $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

Utifrån Venndiagrammet framgår att de två områdena inte är samma om det finns något element i universalmängden som inte tillhör mängderna A, B eller C (se Figur 3). Däremot är de två områdena lika om det inte finns något element utanför A, B, och C.

Om $A = B = C = \mathcal{U} = \{1\}$. Då gäller följande:
$\overline{A \cup B} \setminus \overline{C} = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} \setminus \overline{\{1\}} = \varnothing$ och $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (\overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}) \cap \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} = \varnothing$. Detta innebär att VL = HL.

Däremot, om $A = B = C = \{1\}$ och $\mathcal{U} = \{1, 2\}$ då gäller följande:
$\overline{A \cup B} \setminus \overline{C} = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} \setminus \overline{\{1\}} = \varnothing$ och $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (\overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}) \cap \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}} = \overline{\{1\}} = \{2\}$. I detta fall VL $\neq$ HL eftersom $\varnothing \neq \{2\}$.

(d) Det gäller ibland.

Låt oss betrakta mängderna A och $A \setminus B$.

Om det inte finns något element i A som också tillhör B, då gäller att $A = A \setminus B$. Detta innebär att deras potensmängder är lika och därmed också delmängdär av varandra. T.ex. om $A = \{1\}, B = \{2\}$ blir $2^A = 2^{\{1\}}$ och $2^{A \setminus B} = 2^{\{1\} \setminus \{2\}} = 2^{\{1\}}$, dvs. $2^A = 2^{A \setminus B}$. Detta innebär att $2^A \subseteq 2^{A \setminus B}$.

Om A och B däremot har gemensamma element, blir A och $A \setminus B$ olika. Till exempel, om $A = B = \{1\}$ får vi att $2^A = 2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$ och $2^{A \setminus B} = 2^{\{1\} \setminus \{1\}} = 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. I detta fall $VL \notin HL$.

(e) Det gäller alltid.

Eftersom $A \setminus B$ består av element som tillhör A men inte B, gäller att alla element i $A \setminus B$ också tillhör A. Därmed kan $A \setminus B$ inte ha fler element än A, vilket innebär att $|A \setminus B| \leq |A|$.

Vi vet också att B är en icke-tom mängd. Detta innebär att B har minst ett element, dvs. $1 \leq |B|$. Detta innebär att $|A \setminus B| < |A| + |B|$ eftersom HL har ökat med minst ett i förhållande till $|A \setminus B| \leq |A|$.

3. (a) Avgör för relationen nedan om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller antisymmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Motivera dina svar.

   Låt mängden $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:
   $R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in A, \text{ och } a + b \text{ är jämn}\}$

   (b) Bestäm det transitiva höljet för relationen ovan.

Lösningsförslag.

(a) Låt oss börja med att bestämma relationens element. Vi börjar med 1. Med 1 kan vi välja 1 och 3 så att summan blir jämn, vilket innebär att $(1, 1)$ och $(1, 3)$ tillhör relationen. Vi fortsätter med de andra elementen och får då
$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$.

(b) En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (a, a) \in R$.
Eftersom $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ tillhör R, är R reflexiv.

En relation är symmetrisk om $(x, y) \in R$ innebär att $(y, x) \in R$ också för alla $x, y \in A$. Detta gäller för denna relation eftersom om (x, y) är med i relationen innebär det att $x + y$ är jämnt, och eftersom addition är kommutativ, gäller också att $y + x$ är jämnt. Därför är (y, x) också med i relationen, och relationen är symmetrisk.

En relation är antisymmetrisk om för alla $x, y \in A$ om $(x, y) \in R \land$

$(y,x) \in R$, då måste $x = y$. Eftersom både $(1,3)$ och $(3,1)$ tillhör relationen är relationen inte antisymmetrisk.

En relation är transitiv om för alla $(x,y),(y,z) \in R$ gäller att $(x,z) \in R$. Summan $x + y$ är jämn om båda elementen x och y är antingen jämna eller udda. Om (x,y) och (y,z) tillhör relationen, måste även alla tre elementen, $x, y,$ och z vara antingen jämna eller udda. Detta innebär att summan $x + z$ också jämn, och därmed tillhör (x,z) relationen. Därför är relationen transitiv.

(c) Vi kan beräkna transitiva höljet för relationen med den iterativa metoden.

- $S_0 = R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(4,2),(4,4)\}$
- $S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 = \{(1,1),(1,3),(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(2,2),(2,4),$ $(3,1),(3,3),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4),(4,2),(4,4)\} \cup S_0 =$ $\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(4,2),(4,4)\} \cup S_0 =$ $S_0 \cup S_0 = S_0$

Man kan också säga att eftersom relationen är transitiv, är dess transitiva höljet relationen själv.

4. Låt $f\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ vara definierad enligt $f(n) = (n+2)^2 + 2$ där $\mathbb{N}^+$ betecknar de positiva naturliga talen.

(a) Ange värdena f(1), f(2), och f(4).

(b) Visa att f är injektiv.

(c) Visa att f inte är surjektiv.

(d) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen inte längre är injektiv? Motivera ditt svar.

(e) Är det möjligt att ändra domänen och/eller målmängden så att funktionen blir surjektiv? Motivera ditt svar.

Lösningsförslag.

(a) $f(1) = (1+2)^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$, $f(2) = (2+2)^2 + 2 = 4^2 + 2 = 18$, $f(4) = (4+2)^2 + 2 = 6^2 + 2 = 38$.

(b) En funktion är injektiv om $f(x) = f(y)$ så är $x = y$. Låt oss anta att $f(n) = f(m)$ för några $n, m \in \mathbb{N}^+$. Detta innebär att $(n+2)^2 + 2 = (m+2)^2 + 2$. Från denna ekvation får vi att $(n+2)^2 = (m+2)^2$. Eftersom n och m är positiva naturliga tal, är också $n+2$ och $m+2$ positiva. Om kvadraterna av två positiva tal är lika, måste de två också vara lika, vilket ger $n = m$. Därmed är funktionen injektiv.
(Alternativ förklaring: $(n+2)^2 + 2 = (m+2)^2 + 2$ innebär det att antingen $n+2 = m+2$ eller $n+2 = -(m+2)$ eftersom deras kvadrater är lika. Eftersom både n och m är positiva naturliga tal, är endast

$n + 2 = m + 2$ möjligt. Därför $n = m$ vilket visar att funktionen är injektiv.)

(c) En funktion $f : A \to B$ är surjektiv om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$. Låt oss undersöka om det finns ett naturligt tal n i domänen $\mathbb{N}^+$ sådant att $f(n) = 1$ där $1 \in \mathbb{N}^+$. Detta innebär att $(n + 2)^2 + 2 = 1$. Om vi försöker lösa ekvationen får vi $(n + 2)^2 = -1$, vilket är omöjligt för ett positivt naturligt tal. Därför är f inte surjektiv.

(d) Om domänen är mängden av alla heltal och målmängden alla naturliga tal, dvs. funktionen definieras $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, finns det en andra lösning för ekvationen $f(n) = f(m)$. $(n + 2)^2 + 2 = (m + 2)^2 + 2$, $(n + 2)^2 = (m+2)^2$. Detta ger två fall: $n+2 = -(m+2)$ eller $n+2 = -(m+2)$, $n = -m - 4$. Exempelvis är $n = 1$ och $m = -5$ en lösning. Därför är funktionen inte injektiv för $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

(e) Om domänen består av alla reella tal och målmängden består av reella tal $y \geq 2$, dvs. funktionen definieras $f : \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$, kan vi bestämma vilka element i domänen som mappas till y i målmängden. Låt $f(x) = y$ där $y \geq 2$. Detta ger $= (x + 2)^2 + 2$. Lös ekvationen för x: $y - 2 = (x + 2)^2$, $\sqrt{y - 2} = x + 2$, $\sqrt{y - 2} - 2 = x$. Eftersom $2 \leq y$, $0 \leq y - 2$, så $\sqrt{y - 2}$ är väldefinierad och $x \in \mathbb{R}$.Därför är funktionen surjektiv.

5. Bevisa med hjälp av induktion att $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ för alla heltal $n \geq 0$.

Lösningsförslag.

Bevis:
Låt $P(n)$ vara påståendet att $P(n) : 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 0$

Bassteget:
Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 0$. Då gäller att
$P(0) : 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^1 - 1 = 2^{0+1} - 1$

Induktionssteget:
Anta att $P(k) : 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ sant för något $k \geq 0$.

Vi ska nu visa att detta medför att $P(k + 1)$ är sant, dvs.
$P(k + 1) : 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$
$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{k+1} = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} =$ /enligt induktionsantagande/
$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+1+1} - 1 = 2^{(k+1)+1} - 1$.

Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n \geq 0$.

6. Låt A vara mängden $A = \{1,2,3,4\}$.
Låt R och S vara två relationer över $A \times A$:
$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\}$,
$S = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

   (a) Är R en partialordning (en relation som är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv)? Motivera ditt svar.

   (b) Är S en partialordning? Motivera ditt svar.

   (c) Skapa sammansättningen $R \circ S$.

   (d) Skapa sammansättningen $S \circ R$.

   (e) Är sammansättningarna partialordningar? Motivera ditt svar.

   Lösningsförslag.

   (a) En relation är reflexiv om för alla $x \in A : (x,x) \in R$. Eftersom $(1,1) \notin R$ är R inte reflexiv. Därför är R inte en partialordning.

   (En relation är antisymmetrisk om för alla $x,y \in A : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$ medför att $x = y$. Eftersom både $(1,3)$ och $(3,1)$ finns i R, men $1 \neq 3$ är R inte antisymmetrisk.)

   (En relation är transitiv om för alla $(x,y),(y,z) \in R$ gäller att $(x,z) \in R$. Eftersom $(1,3)$ och $(3,4) \in R$ men $(1,4) \notin R$, är R inte transitiv.)

   (b) Relationen S är reflexiv eftersom $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \in S$.

   Relationen S är antisymmetrisk eftersom $(2,1) \notin S$ trots att $(1,2) \in S$ och alla andra par i S är av formen (x,x).

   Relationen S är transitiv eftersom det enda paret $(1,1),(1,2)$ som vi kan använda i transitivitetens definition resulterar i $(1,2)$ som ingår i S. Alltså är S transitiv och således en partialordning.

   (c) $R \circ S = \{(1,2),(1,3),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2)\}$

   (d) $S \circ R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,2)\}$.

   (e) Relationen $R \circ S$ är inte reflexiv eftersom $(1,1) \notin R \circ S$. Därför är $R \circ S$ inte en partialordning.

   Relationen $S \circ R$ är också inte reflexiv, eftersom $(1,1) \notin S \circ R$. Därför är $S \circ R$ inte en partialordning.