

Lösningsförslag för TDDC75 - Lektion 8

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

- Obligatoriska uppgifter:

1. Fibonacci-talen:

$$\begin{aligned}F_0 &= 0 \\F_1 &= 1 \\F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \text{ för } n \geq 2.\end{aligned}$$

Visa med hjälp av induktionsprincipen att $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ för alla heltal $n \geq 0$.

Lösning.

Påståendet är $P(n) : F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.

Bassteget:

$$n = 0$$

$$\text{VL: } F_0 = 0$$

$$\text{HL: } F_2 - 1 = F_0 + F_1 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\text{VL=HL, dvs. påståendet stämmer för } n = 0.$$

Induktionssteget:

Induktionsantagandet: vi antar att $P(k) : F_0 + F_1 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$ för något heltal $k \geq 0$.

Vi visar att i så fall $P(k+1) : F_0 + F_1 + \dots + F_k + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$ också gäller.

$$\begin{aligned}\text{VL} &= F_0 + F_1 + \dots + F_k + F_{k+1} = \text{/enligt induktionsantagandet/} = \\&= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} = \text{/enligt definitionen av Fibonaccitalen: } F_{k+3} = F_{k+1} + F_{k+2} \text{/} = \\&= F_{k+3} - 1.\end{aligned}$$

$$\text{VL=HL. VSV}$$

Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq 0$.

2. Visa med hjälp av induktionsprincipen att $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ för alla heltal $n \geq 1$.

Lösning.

Påståendet är $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Bassteget:

$$n = 0$$

$$\text{VL: } 1^2 = 1$$

$$\text{HL: } \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{VL=HL, dvs. påståendet stämmer för } n = 1.$$

Induktionssteget:

Induktionsantagandet: vi antar att $P(k) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ för något heltal $k \geq 1$.

Vi visar att i så fall $P(k+1) : 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$ också gäller.

$$\begin{aligned}\text{VL} &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \text{/enligt induktionsantagandet/} = \\&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{2k^3+3k^2+k}{6} + (k+1)^2 = \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \\ \text{HL} &= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \\ \text{VL=HL. VSV}\end{aligned}$$

Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer att $P(n)$ är sant för alla heltal $n \geq 1$.

3. Visa med hjälp av induktionsprincipen att $2^n < n!$ för alla heltal $n > 3$.

Lösning.

Låt $P(n)$ vara påståendet att $2^n < n!$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n > 3$.

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 4$. Då gäller att $2^4 = 16 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$
- Induktionssteget: Anta att $P(k) : 2^k < k!$ är sant för något heltal $k > 3$. Vi ska nu visa att då är också att $P(k+1) : 2^{k+1} < (k+1)!$ sant. Vi använder oss av induktionsantagandet att $2^k < k!$ och $2 < k+1$:

$$VL = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2 \cdot k! < (k+1) \cdot k! = (k+1)! = HL$$

Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer att $P(n)$ är sant för alla heltal $n > 3$.

4. Visa med hjälp av induktionsprincipen att alla heltal $n > 3$ kan skrivas på formen $n = 2a + 5b$ där $a, b \in \mathbb{N}$.

Lösning:

Låt $P(n)$ vara påståendet att $\exists a, b \in \mathbb{N} : n = 2a + 5b$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n > 3$.

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 4$:
 $4 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0$, dvs. påståendet stämmer för $n = 4$ ($a = 2, b = 0$)
 $5 = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1$, dvs. påståendet stämmer för $n = 5$ ($a = 0, b = 1$)
 $6 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0$, dvs. påståendet stämmer för $n = 6$ ($a = 3, b = 0$)
- Induktionssteget:
 Induktionssantagande: Anta att $P(k) : k = 2a_1 + 5b_1$ är sant för något heltal $k \geq 6$, där $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1) : k+1 = 2a_2 + 5b_2$ är sant där $a_2, b_2 \in \mathbb{N}$. Vi börjar med att skriva om $k+1$ enligt induktionsantagandet där a och b är icke-negativa heltal.

$$k+1 = 2a_1 + 5b_1 + 1$$

Det finns två fall. Antingen är $b_1 = 0$ eller så är $b_1 > 0$.

- * Vi börjar med att anta $b_1 = 0$, dvs. $k = 2a_1$, vilket måste innebära att $a_1 \geq 3$, eftersom vi antog att $k \geq 6$. Alltså kan vi skriva

$$k+1 = 2a_1 + 5b_1 + 1 = 2a_1 + 1 = 2(a_1 - 2) + 4 + 1 = 2(a_1 - 2) + 5$$

där $(a_1 - 2) \geq 1$ och $a_2 = a_1 - 2$ och $b_2 = 1$.

- * Om $b_1 > 0$ gäller:

$$k+1 = 2a_1 + 5b_1 + 1 = 2a_1 + 5(b_1 - 1) + 5 + 1 = 2a_1 + 5(b_1 - 1) + 6 = 2(a_1 + 3) + 5(b_1 - 1)$$

där $(b_1 - 1) \geq 0$ och $a_2 = a_1 + 3$ och $b_2 = b_1 - 1$.

I båda fallen kunde $k+1$ skrivas på formen $k+1 = 2a_2 + 5b_2$ där $a_2, b_2 \in \mathbb{N}$.

Observera att det måste visas och motiveras att i konstruktionen av $k+1$ i form av $2a_2 + 5b_2$ blir a_2 och b_2 naturliga tal. Av de båda stegen och induktionsprincipen gäller $P(n)$ för alla heltal $n > 3$.

5. Ibland är det lättare att använda den STARKA induktionsprincipen där man antar att påståendet gäller för alla $n_0 \leq m \leq k$ och visar att det även gäller för $k+1$ (istället för att gå från ett tal till nästa).

Då måste man testa flera värde under bassteget - minst så många som man skulle vilja använda i induktionssteget: testa om $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_1)$ är sanna där $n_1 \geq n_0$.

Då blir induktionsantagandet och induktionssteget de följande.

Induktionssantagande: Anta att $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(k)$ är sanna för något $k \geq n_1$.

Induktionssteget: Bevisa att även $P(k+1)$ är sant där man får använda inte bara att $P(k)$ är sant men även att $P(k-1), P(k-2), \dots, P(n_0)$ är sanna eftersom det var vårt induktionssantagande.

Då måste man skriva i slutsatsen starka induktionsprincipen istället för induktionsprincipen.

Uppgiften: Låt $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n \geq 2$. Visa med hjälp av STAR-KA induktionsprincipen att $a_n < (7/4)^n$ för alla $n \geq 0$.

Lösning:

Först räknar vi ut de första talen i serien

- $a_0 = 0$
- $a_1 = 1$
- $a_2 = a_0 + a_1 = 0 + 1 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 2 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 3 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 3 + 5 = 8$
- $a_7 = a_6 + a_5 = 5 + 8 = 13$

Vilket kanske känns igen som Fibonacci-sekvensen.

Vi visar påståendet genom att använda starka induktionsprincipen. Låt $P(n)$ vara påståendet att $a_n < (7/4)^n$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n \geq 0$.

– Bassteget: Vi visar först att $P(0), P(1)$ och $P(2)$ gäller:

- * $a_0 = 0 < 1 = (7/4)^0$
- * $a_1 = 1 < 7/4 = (7/4)^1$
- * $a_2 = 1 < 49/16 = (7/4)^2$

– Induktionssteget: Anta att $P(m) : a_m < (7/4)^m$ gäller för något $k \geq m \geq 2$, dvs. att $a_k < (7/4)^k$ och att $a_{k-1} < (7/4)^{k-1}$ där $k-1 \geq 2$. Vi ska då visa att även $P(k+1) : a_{k+1} < (7/4)^{k+1}$ är sant. Eftersom $k-1 \geq 2$, gäller $k \geq 3$ också. Då kan vi skriva a_{k+1} som en summa av dess två föregångare, och använda induktionsantagandet:

$$\begin{aligned} VL = a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} < (7/4)^k + (7/4)^{k-1} = (7/4)^k + (7/4)^k(4/7) = \\ &= (1 + 4/7)(7/4)^k = (11/7)(7/4)^k = \\ &= (44/28)(7/4)^k < (49/28)(7/4)^k = (7/4)(7/4)^k = (7/4)^{k+1} = HL \end{aligned}$$

De två stegen tillsammans med starka induktionsprincipen ger att $a_n < (7/4)^n$ för alla $n \geq 0$.

• Rekommenderade uppgifter:

1. Visa med hjälp av induktionsprincipen att $n^2 < 2^n$ för alla heltal $n > 4$.

Lösning:

Vi visar detta med hjälp av induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $n^2 < 2^n$. Vi ska visa att $P(n)$ är sant för alla $n > 4$.

- Bassteget: Först visar vi att $P(n)$ är sant för $n = 5$. Då gäller att $n^2 = 5 \cdot 5 = 25 < 32 = 2^5$
- Induktionssteget: Anta att $P(k) : k^2 < 2^k$ är sant för något $k > 4$. Vi ska nu visa att då gäller också att $P(k+1) : (k+1)^2 < 2^{k+1}$ är sant. Vi använder oss av att $k > 4$ samt induktionsantagandet att $k^2 < 2^k$:

$$VL = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 < k^2 + 2k + k = k^2 + 3k < k^2 + k \cdot k = 2k^2 < 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} = HL$$

Av de båda stegen och induktionsprincipen följer att $P(n)$ är sant för alla heltal $n > 4$.

2. Visa med hjälp av induktionsprincipen att en kvadrat kan delas upp i exakt $3n + 1$ mindre kvadrater för varje heltal $n \geq 1$, under förutsättningarna att
 - (i) hela kvadraten täcks av de mindre kvadraterna (utan luckor),
 - (ii) de mindre kvadraterna överlappar inte varandra, och
 - (iii) de mindre kvadraterna behöver inte vara lika stora.

Vi räknar alltså antal minsta kvadrater som inte innehåller några andra kvadrater inuti.

Inget lösningsförslag finns för denna uppgift.

- Extra uppgift från boken Matematiska utmaningar av Paul Vaderlind.

Det finns en grupp på n personer där $n \in \mathbb{N}, n > 3$. Var och en av dem känner till en hemlig upplysning som inte är identisk med någon annans. Visa att $2n-4$ telefonsamtal mellan dem räcker för att alla n ska känna till alla hemligheter. Vi förutsätter att alla har tillgång till en telefon och att parterna under varje samtal utbyter alla hemligheter de känner till.

Till exempel: Antag att det finns tre personer: A, B, och C. A har en hemlighet som kallas a, B har en hemlighet b, och C har en hemlighet c. A ringer B, och de utbyter sina hemligheter. Dvs. efter samtalet känner både A och B hemligheterna a och b. Sedan ringer B till C, och berättar för C om hemligheter a och b, och C berättar c för B. Nu känner både B och C till a, b och c.

För att A också ska känna till alla hemligheter, måste A eller C ringa A. Alltså krävs det minst 3 samtal för att alla tre ska känna till alla hemligheter.

Inget lösningsförslag finns för denna uppgift.