

Lektionsuppgifter för TDDC75 - Lektion 7

Detta dokument är baserat på arbeten av Mikael Asplund, Asratien et al., samt tidigare tentor.

- Obligatoriska uppgifter:

1. Låt P vara mängden av alla personnummer som någon har och $f : P \mapsto \mathbf{N}$ vara en funktion som anger ålder som hör till varje personnummer.
 - (a) Är f injektiv?
 - (b) Är f surjektiv?
 - (c) Är f bijektiv?
2. (Inspirerat av en tidigare tentauppgift.) Låt $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, en funktion som konverterar Celsius-grader till Fahrenheit, vara definierad enligt $f(c) = \text{FLOOR}(c \cdot \frac{9}{5} + 32)$. (FLOOR avrundar ett tal till största heltalet mindre än eller lika med talet. Var uppmärksam på definitionsområdet och målmängden.)
 - (a) Ange värdena $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$ och $f(10)$.
 - (b) Är f injektiv?
 - (c) Är f surjektiv?
 - (d) Är f bijektiv?
 - (e) Låt oss ändra definitionsområdet till $\mathbf{Z}$. Är den nya 'funktionen' fortfarande en funktion? Om ja, är den injektiv, surjektiv eller bijektiv?
3. Låt $A = \{x, y, z\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$ och funktionerna $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow A$ definieras som $f = \{x \mapsto 1, y \mapsto 2, z \mapsto 3\}$ och $g = \{0 \mapsto z, 1 \mapsto y, 2 \mapsto z, 3 \mapsto z\}$.
 - (a) Vad blir sammansättningen $g \circ f$?
 - (b) Vad blir sammansättningen $f \circ g$?
4. Låt f vara en bijektiv funktion $f : A \rightarrow B$ och sin inversen $f^{-1} : B \rightarrow A$. Vad blir $f \circ f^{-1}$ och $f^{-1} \circ f$?
5. Antag att $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definieras enligt

$$f(n) = n + 1$$

och att $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definieras enligt

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är jämn,} \\ 1 & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

- (a) Är f eller g injektiv och/eller surjektiv?
 - (b) Vad blir $(f \circ g)(n)$ för de fem minsta naturliga talen n ?
 - (c) Vad blir på motsvarande sätt $(g \circ f)(n)$?
 - (d) Beskriv funktionen $(f \circ f)(n)$
6. Antag att vi har fyra *olika* funktioner f_1, f_2, f_3, f_4 där
 - f_1 är injektiv men inte surjektiv,
 - f_2 är surjektiv men inte injektiv,
 - f_3 är bijektiv, och
 - f_4 är varken injektiv eller surjektiv.

Ge exempel på hur funktionerna f_1, f_2, f_3, f_4 kan se ut givet att funktionernas domäner och värdemängder kan väljas bland följande mängder:

$$A = \{a, b, c\} \quad B = \{0, 1, 2\} \quad C = \{0, 1\}.$$

7. Låt $f : \mathbf{N} \rightarrow 2^{\mathbf{N}}$ vara en funktion definierad som $f(n) = \{i \in \mathbf{N} \mid i \leq n\}$ för alla $n \in \mathbf{N}$.
 - (a) Ange funktionsvärdena för $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ och $f(5)$.
 - (b) Är f injektiv?
 - (c) Är f surjektiv?

- (d) Existerar den inversa funktionen $f^{-1} : 2^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$?
8. Kryptering av ett meddelande kan modelleras som en funktion (encrypt) $e_K : A \rightarrow B$ där A är mängden av klartextmeddelanden, B är mängden av krypterade meddelanden och K är nyckeln. På motsvarande sätt finns en dekrypteringsfunktion $d_K : B \rightarrow A$, som för varje krypterat meddelande ger det ursprungliga meddelandet i klartext.
- (a) Uttryck funktionen d_K med hjälp av e_K .
- (b) Är e_K alltid, aldrig, eller ibland injektiv?
- (c) För att rent praktiskt kunna skapa krypterings och dekrypteringsfunktioner brukar meddelanden delas upp i *block* av en viss storlek, till exempel 128 bitar. Om elementen i A består av 128 bitars meddelanden, vad gäller då för storleken på elementen i B ? Hur relaterar detta till huruvida e_K är injektiv och/eller surjektiv?
9. Låt f vara $f : R_+ \rightarrow R_+$ och $g : R_+ \rightarrow R_+$ vara definierade genom $f(x) = x^2$ och $g(x) = \frac{1}{1+x}$ för $x \in R_+$. Vad blir de sammansatta funktionerna $g \circ f : R_+ \rightarrow R_+$ och $f \circ g : R_+ \rightarrow R_+$?
- Rekommenderade uppgifter:
 1. En logisk grind (i digitaltekniken) med m st. ingångar $x_1, \dots, x_m$ kan betraktas som en funktion $f : \{0, \dots, 2^m - 1\} \mapsto \{0, 1\}$, där ingångarna betraktas som en binär kodning av ett naturligt tal. Bestäm för var och en av följande definitioner av f vilken typ av grind den motsvarar, eller om den inte motsvarar någon av de vanliga grindtyperna alls.

(a) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{om } n = 2^m - 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

(b) $f(n) = \begin{cases} 0, & \text{om } n = 0 \\ 1, & \text{annars} \end{cases}$

(c) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{om } n < 2^m - 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$
 2. Låt F vara mängden av satslogiska formler (exempelvis gäller att $(p \wedge q) \in F$). Låt funktionen $f : F \times F \rightarrow \{0, 1\}$, vara definierad så att $f(F_1, F_2) = 1$ om $F_1 \Rightarrow F_2$ och $f(F_1, F_2) = 0$ annars.

(a) Avgör värdet av $f((p \vee q), (p \vee q \vee r))$.

(b) Är f surjektiv?

(c) Är f injektiv?

(d) Beskriv vilka element som finns i mängden $\{F_i \in F \mid f(1, F_i) = 1\}$ (de har en speciell benämning).
 3. Antag att $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow C$. Visa eller motbevisa följande påståenden

(a) Om $g \circ f$ är surjektiv så måste f och g vara surjektiva.

(b) Om f och g är surjektiva så måste $g \circ f$ vara surjektiv.

(c) Om $g \circ f$ är injektiv så måste f och g vara injektiva.
 - Extra uppgifter.

Visa att $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |x - 1|$ är surjektiv.