

Låt mängden $A = \{1, 2, 3\}$ och låt relationen $R \subseteq A \times A$ vara definierad som:

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}.$$

Vi kan beräkna transitiva höljet för relationen med hjälp av den iterativa metoden.

Steg 1. $S_0 = R$, $n=0$

Steg 2. $S_{n+1} = (R \circ S_n) \cup S_n$

Steg 3. Jämför: är $S_{n+1} = S_n$? Om ja, då är vi klara och transitiva höljet är $R^+ = S_n$. Om nej, n med 1 och upprepa från Steg 2.

Sammansättningen av två relationer P och Q definieras som

$$P \circ Q = \{(x, z) : (x, y) \in Q, (y, z) \in P\}.$$

$$P \circ Q = \{(\text{yellow } x, \text{green } z) : (\text{yellow } x, \text{cyan } y) \in Q, (\text{cyan } y, \text{green } z) \in P\}$$

$$R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

Steg 1. $S_0 = R$, $n=0$

$$S_0 = R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

Steg 2. $R \circ S_0 = ?$

Välj ett par från S_0 och hitta ett par i R så att de följer mönstret

S_0	R	
$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$	$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$	
$(\text{yellow } x, \text{cyan } y)$ $(\text{yellow } 0, \text{cyan } 1)$ $(\text{yellow } 1, \text{cyan } 2)$	$(\text{cyan } y, \text{green } z)$ $(\text{cyan } 1, \text{green } 2)$ $(\text{cyan } 2, \text{green } 3)$	
		$\rightarrow (\text{yellow } 0, \text{green } 2)$ går in i $R \circ S_0$
		$\rightarrow (\text{yellow } 1, \text{green } 3)$ går in i $R \circ S_0$

Inga fler sådana par finns med S_0 och R . Alltså får vi:

$$S_1 = (R \circ S_0) \cup S_0 = \{(0, 2), (1, 3)\} \cup \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Steg 3. Eftersom $S_1 \neq S_0$ sätter vi $n=1$ och går tillbaka till Steg 2.

Steg 2. $S_2 = (R \circ S_1) \cup S_1$

Välj ett par från S_1 och hitta ett par i R så att de följer mönstret

S_1	R	
$\{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$	$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$	
(x, y)	(y, z)	
$(0, 1)$	$(1, 2)$	$\rightarrow (0, 2)$ går in i $R \circ S_1$
$(0, 2)$	$(2, 3)$	$\rightarrow (0, 3)$ går in i $R \circ S_1$
$(1, 2)$	$(2, 3)$	$\rightarrow (1, 3)$ går in i $R \circ S_1$

Inga fler sådana par finns med S_1 och R . Alltså får vi:

$$S_2 = (R \circ S_1) \cup S_1 = \{(0, 2), (0, 3), (1, 3)\} \cup \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\} = \\ = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Steg 3. Eftersom $S_2 \neq S_1$ sätter vi $n=2$ och går tillbaka till Steg 2.

Steg 2. $S_3 = (R \circ S_2) \cup S_2$

Välj ett par från S_2 och hitta ett par i R så att de följer mönstret

S_2	R	
$\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$	$\{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$	
(x, y)	(y, z)	
$(0, 1)$	$(1, 2)$	$\rightarrow (0, 2)$ går in i $R \circ S_2$
$(0, 2)$	$(2, 3)$	$\rightarrow (0, 3)$ går in i $R \circ S_2$
$(1, 2)$	$(2, 3)$	$\rightarrow (1, 3)$ går in i $R \circ S_2$

Inga fler sådana par finns med S_2 och R . Alltså får vi:

$$S_3 = (R \circ S_2) \cup S_2 = \{(0, 2), (0, 3), (1, 3)\} \cup \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\} = \\ = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

Steg 3. Eftersom $S_3 = S_2$ är vi klara och drar slutsatsen att det transitiva höljet är $R^+ = S_2$.

Några kommentarer:

- Beräkningen följer den iterativa algoritmen. Det är bevisat att algoritmen genererar det transitiva höljet.
- Det finns naturligtvis vissa genvägar som man kan använda – titta på vad gick in i $R \circ S_0$, $R \circ S_1$, $R \circ S_2$, hur det ser ut efter varandra. Glöm inte motivera din lösning om du använder något som inte står i definitionerna eller algoritmen.
- Samma sak gäller om du använder ett annat sätt att beräkna det transitiva höljet, till exempel ett visuellt sätt – motivera alltid tillvägagångssättet som vi inte har diskuterat metoden under föreläsningarna eller lektionerna.