

Lektionsuppgifter för TDDC75 - Lektion 6

Detta dokument är baserat på arbeten av Mikael Asplund, Asratien et al., samt tidigare tentor.

Det reflexiva höljet Det reflexiva höljet av en relation är mängden vi får när vi lägger till de dubbelpar som saknas i mängden.

Det symmetriska höljet Det symmetriska höljet av en relation är mängden vi får genom att lägga till de spegelvända par som saknas.

Existenskvantifieraren $\exists$, utläses det finns.

Allkvantifieraren $\forall$, utläses för varje.

- Obligatoriska uppgifter:

1. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och låt $R \subseteq A \times A$ vara en relation definierad enligt följande

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

- (a) Är R reflexiv?
- (b) Är R symmetrisk?
- (c) Är R antisymmetrisk?
- (d) Är R transitiv?

2. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt R vara en relation på A definierade enligt följande:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

- (a) Beräkna R^+ , dvs. det transitiva höljet av R .
- (b) Är R^+ reflexiv?
- (c) Är R^+ symmetrisk?
- (d) Är R^+ antisymmetrisk?
- (e) Är R^+ en partialordning?

3. Låt R_1 och R_2 vara följande relationer på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \\ R_2 &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2)\} \end{aligned}$$

Skriv ut följande relationer (på samma form som relationerna ovan):

- (a) Reflexiva höljet av R_1 .
- (b) Symmetriska höljet av R_1 .
- (c) Symmetriska höljet av $R_1 \cup R_2$.
- (d) Transitiva höljet av R_1 .

4. Avgör om följande relationer utgör partialordningar. Motivera varför eller varför inte.

- (a) $<$ på de naturliga talen, $\mathbb{N}$
- (b) $\leq$ på $\mathbb{N}$
- (c) $\geq$ på $\mathbb{N}$
- (d) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, \dots, 100\}$, $R = \{(i, j) \in A \times A \mid s(i) \leq s(j)\}$, och $s(i)$ är siffersumman för talet i (exempelvis $s(13) = 1 + 3 = 4$).

5. I objektorienterad programmering kan en klass *ärva* egenskaper av en annan klass. Som ett exempel kan vi tänka oss en klass **Fordon**. En *barnklass* (eller subklass) till **Fordon** är till exempel en **Bil**. En barnklass till bil är exempelvis en **Elbil**. Vi kan nu tänka oss en relation mellan klasser som vi kallar *ärEnSorts*, så att **Elbil ärEnSorts Bil**, och **Bil ärEnSorts Fordon**. Ta ställning till om relationen *ärEnSorts* bör definieras som en partialordning.

6. Avgör om följande relationer utgör ekvivalensrelationer. Motivera varför eller varför inte.

- (a) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
- (b) $\subseteq$ på 2^A för $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- (c) $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |i - j| < 2\}$

7. För varje partition nedan, ange vilken ekvivalensrelation den genererar.

- (a) $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}$
- (b) $\{\{A, B, C\}\}$
- (c) $\{\{0\}, \{1\}\}$

8. (Tidigare tentauppgift.) Låt A vara en mängd $A = \{1, 2, 3\}$ och R och S två relationer över $A \times A$: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$.

- (a) Visa att både R och S är partialordningar.
- (b) Skapa sammansättningarna $R \circ S$ och $S \circ R$.
- (c) Visa att båda sammansättningarna är partialordningar.
- (d) Finns det två partialordningar T och V över $A \times A$ som gör att deras sammansättning $T \circ V$ inte är en partialordning? T eller V kan vara samma som R eller S .

9. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen R på A vara $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 4)\}$. Beräkna det transitiva höljet av relationen R .

• Rekommenderade uppgifter:

1. Avgör om följande relationer utgör partialordningar. Motivera varför eller varför inte.
 - (a) $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ där $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2i \leq j\}$
2. Avgör om följande relationer utgör ekvivalensrelationer. Motivera varför eller varför inte.
 - (a) $\equiv$ på mängden av satslogiska formler.
 - (b) $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j = 0\}$
3. Betrakta relationen $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som definieras enligt $R = \{(i, j) \mid \exists n, m \in \mathbb{N}[i - 3n = j - 3m]\}$
 - (a) Visa att R är en ekvivalensrelation.
 - (b) Karakterisera (beskriv) ekvivalensklasserna $[0], [1], [2]$
4. (Tidigare tentauppgift.) Antag att S är följande relation på $A = \{1, 2, 3, 4\}$: $S = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. Ange den minsta ekvivalensrelationen T på A som uppfyller villkoret $S \subseteq T$. Med "minsta" avses den relation som har minst antal par.

• Extra uppgifter.

1. Låt $P \subseteq A \times A$ och $Q \subseteq A \times A$ vara två godtyckliga ekvivalensrelationer. Visa att också $P \cap Q$ måste vara en ekvivalensrelation. Gäller detsamma för $P \cup Q$?
2. Antag att $R \subseteq A \times A$ är en partialordning på A . Antag vidare att $P \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ är definierad enligt följande

$$(x_1, x_2)P(y_1, y_2) \text{ om } x_1 R y_1 \text{ och } x_2 R y_2.$$

Visa eller motbevisa att P är en partialordning på $A \times A$.