

Lösningförslag för TDDC75 - Lektion 6

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

- Obligatoriska uppgifter:

1. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och låt $R \subseteq A \times A$ vara en relation definierad enligt följande

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

- (a) Är R reflexiv?
- (b) Är R symmetrisk?
- (c) Är R antisymmetrisk?
- (d) Är R transitiv?

Lösning:

- (a) Ja, R är reflexiv, eftersom för alla $x \in A$ gäller att $(x, x) \in R$:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 2) \in R$$

- (b) Nej, R är inte symmetrisk. Till exempel $(0, 1) \in R$, men $(1, 0) \notin R$.
- (c) Ja, R är antisymmetrisk, eftersom för alla $(x, y) \in R$ gäller att $x = y$ eller $(y, x) \notin R$.
- (d) Ja, R är transitiv. För att inse detta måste vi räkna upp alla par av par $(x, y), (z, w) \in R$ sådana att $y = z$ och kontrollera om $(x, w) \in R$ (vi hoppar över fallen då $x = y$ eller $z = w$ eftersom dessa följer omedelbart). Då återstår endast ett par av par: $(0, 1), (1, 2) \in R$, vilket är OK eftersom $(0, 2) \in R$.

2. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt R vara en relation på A definierade enligt följande:

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

- (a) Beräkna R^+ , dvs. det transitiva höljet av R .
- (b) Är R^+ reflexiv?
- (c) Är R^+ symmetrisk?
- (d) Är R^+ antisymmetrisk?
- (e) Är R^+ en partialordning?

Lösning:

- (a) Genom att använda definitionen:

$$R = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \dots =$$

$$\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\} \cup$$

$$\{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 2)\} \cup$$

$$\{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (3, 4)\} \cup$$

$$\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\} \cup \dots =$$

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Vi kan sluta eftersom $R^4 = R$ alltså upprepas samma mängder efter R^4 .

- (b) Nej, $(4, 4) \notin R^+$
- (c) Nej, $(3, 4) \in R^+$ men $(4, 3) \notin R^+$
- (d) Nej, $(1, 2), (2, 1) \in R^+$
- (e) Nej, eftersom den inte är reflexiv och inte heller antisymmetrisk.

3. Låt R_1 och R_2 vara följande relationer på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2)\}$$

Skriv ut följande relationer (på samma form som relationerna ovan):

- (a) Reflexiva höljet av R_1 .
- (b) Symmetriska höljet av R_1 .
- (c) Symmetriska höljet av $R_1 \cup R_2$.
- (d) Transitiva höljet av R_1 .

Lösning:

- (a) Reflexiva höljet av R_1 : $\{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(2, 2), (3, 3), (4, 4)\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$
- (b) Symmetriska höljet av R_1 : $\{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(2, 1), (4, 3), (2, 4)\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$
- (c) Låt $R = R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$. Det symmetriska höljet av R blir då:

$$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\} \cup$$

$$\{(1, 3), (4, 3), (2, 4)\} =$$

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

- (d) $R_1^+ = R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup R_1^4 \dots = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\} \cup \{(1, 2), (3, 2)\} \cup \emptyset = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$ Vi kan sluta eftersom $R^3 = \emptyset$ vilket innebär att även $R^4, R^5, \dots$ blir lika med $\emptyset$ och unionen med den tomma mängden förändrar unionen inte.

4. Avgör om följande relationer utgör partialordningar. Motivera varför eller varför inte.

- (a) $<$ på de naturliga talen, $\mathbb{N}$
- (b) $\leq$ på $\mathbb{N}$
- (c) $\geq$ på $\mathbb{N}$
- (d) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, \dots, 100\}$, $R = \{(i, j) \in A \times A \mid s(i) \leq s(j)\}$, och $s(i)$ är siffersumman för talet i (exempelvis $s(13) = 1 + 3 = 4$).

Lösning:

- (a) $<$ är inte en partialordning på $\mathbb{N}$ eftersom $<$ inte är en reflexiv relation. Till exempel $2 \not< 2$
- (b) $\leq$ är en partialordning på $\mathbb{N}$.
 - $\leq$ är **reflexiv** eftersom för alla $i \in \mathbb{N}$ gäller att $i \leq i$
 - $\leq$ är **transitiv** eftersom för alla $i, j, k \in \mathbb{N}$ gäller att $(i \leq j \wedge j \leq k) \rightarrow (i \leq k)$
 - $\leq$ är **anti-symmetrisk** eftersom för alla $i, j \in \mathbb{N}$ gäller att $(i \leq j \wedge j \leq i) \rightarrow (i = j)$
- (c) $\geq$ är en partialordning på $\mathbb{N}$ av samma skäl som ovan (byt ut $\leq$ mot $\geq$)
- (d) R är inte en partialordning eftersom den inte är anti-symmetrisk. $s(1) = s(10)$ vilket innebär att $(1, 10) \in R$ och $(10, 1) \in R$, men $1 \neq 10$.

5. I objektorienterad programmering kan en klass *ärva* egenskaper av en annan klass. Som ett exempel kan vi tänka oss en klass **Fordon**. En *barnklass* (eller subklass) till **Fordon** är till exempel en **Bil**. En barnklass till bil är exempelvis en **Elbil**. Vi kan nu tänka oss en relation mellan klasser som vi kallar *ärEnSorts*, så att **Elbil ärEnSorts Bil**, och **Bil ärEnSorts Fordon**. Ta ställning till om relationen *ärEnSorts* bör definieras som en partialordning.

Lösning:

Relationen *ärEnSorts* bör definieras som en partialordning. Vi går igenom egenskaperna en i taget:

- Reflexivitet. Det är rimligt att säga att en klass **A** *ärEnSorts* **A**
- Transitivitet. Om en klass **A** *ärEnSorts* **B** och **B** *ärEnSorts* **C** så är det också rimligt att **A** *ärEnSorts* **C**
- Anti-symmetri. Om en klass **A** *ärEnSorts* **B** och **B** *ärEnSorts* **A**, är då **A** = **B**? Ja det är rimligt, men inte självklart. I vardagligt språk kan vi säga att "en gång är en sorts stig" och att en "stig är en sorts gång", men gång är inte exakt samma sak som stig. För klasser vill vi dock ha en mer exakta definitioner.

6. Avgör om följande relationer utgör ekvivalensrelationer. Motivera varför eller varför inte.

- (a) $R \subseteq A \times A$ där $A = \{0, 1, 2, 3\}$ och $R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$
- (b) $\subseteq$ på 2^A för $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
- (c) $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |i - j| < 2\}$

Lösning:

- (a) Ja, R är reflexiv, transitiv och symmetrisk.
- (b) Nej, $\subseteq$ är inte symmetrisk: $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$ men $\{0, 1\} \not\subseteq \{0\}$
- (c) R är reflexiv och symmetrisk, men inte transitiv: $(1, 2) \in R$ och $(2, 3) \in R$, men $(1, 3) \notin R$, så R är inte en ekvivalensrelation.

7. För varje partition nedan, ange vilken ekvivalensrelation den genererar.

- (a) $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}$
- (b) $\{\{A, B, C\}\}$
- (c) $\{\{0\}, \{1\}\}$

Lösning:

- (a) $R = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B), (C, C), (D, D)\}$
- (b) $\{(A, A), (A, B), (A, C), (B, A), (B, B), (B, C), (C, A), (C, B), (C, C)\}$
- (c) $\{(0, 0), (1, 1)\}$

8. (Tidigare tentauppgift.) Låt A vara en mängd $A = \{1, 2, 3\}$ och R och S två relationer över $A \times A$: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$.

- (a) Visa att både R och S är partialordningar.
- (b) Skapa sammansättningarna $R \circ S$ och $S \circ R$.
- (c) Visa att båda sammansättningarna är partialordningar.
- (d) Finns det två partialordningar T och V över $A \times A$ som gör att deras sammansättning $T \circ V$ inte är en partialordning? T eller V kan vara samma som R eller S .

Lösning:

- (a) R är reflexiv eftersom för alla $x \in A : (x, x) \in R$.
 R är anti-symmetrisk eftersom för alla $x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R$ följer att $x = y$. Det finns inte par $(2, 1), (3, 1), (3, 2)$.
 R är transitiv eftersom för alla $(x, y), (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$: $(1, 1) \wedge (1, 2) : (1, 2) \in R$, $(1, 1) \wedge (1, 3) : (1, 3) \in R$, $(1, 2) \wedge (2, 2) : (1, 2) \in R$, $(1, 2) \wedge (2, 3) : (1, 3) \in R$, $(1, 3) \wedge (3, 3) : (1, 3) \in R$, $(2, 2) \wedge (2, 3) : (1, 3) \in R$, $(2, 3) \wedge (3, 3) : (2, 3) \in R$.

Samma gäller S : S är reflexiv eftersom för alla $x \in A : (x, x) \in S$.

S är anti-symmetrisk eftersom för alla $x, y \in A : (x, y) \in S \wedge (y, x) \in S$ följer att $x = y$. Det finns inte par $(2, 1)$.

S är transitiv eftersom för alla $(x, y), (y, z) \in S \rightarrow (x, z) \in S$: $(1, 1) \wedge (1, 2) : (1, 2) \in S$, $(1, 2) \wedge (2, 2) : (1, 2) \in S$.

- (b) $R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ och
 $S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

- (c) Faktiskt $R \circ S = S \circ R = R$ om som vi redan har bevisat att det är en partialordning.
- (d) Låt T vara en relation $T \subseteq A \times A$, $T = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Då är T en partialordning eftersom $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ är med, $(1, 2)$ är inte med, och $(2, 1), (1, 1) \in T \wedge (2, 1) \in T$ och so vidare.
Då är $T \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$. Där $(1, 2) \in T \circ S \wedge (2, 1) \in T \circ S$ så sammansättningen är inte anti-symmetrisk. Eftersom den är inte anti-symmetrisk är sammansättningen inte en partialordning.

9. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och relationen R på A vara $R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 4)\}$. Beräkna det transitiva höljet av relationen R .

Lösning:

$$S_0 = R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 4)\}$$

$$S_1 = R \circ S_0 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

• Rekommenderade uppgifter:

1. Avgör om följande relationer utgör partialordningar. Motivera varför eller varför inte. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ där $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2i \leq j\}$

Lösning:

R är inte en partialordning eftersom den inte är reflexiv. $2 \cdot 1 \not\leq 1$ så $(1, 1) \notin R$

2. Avgör om följande relationer utgör ekvivalensrelationer. Motivera varför eller varför inte.

(a) $\equiv$ på mängden av satslogiska formler.

(b) $R = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i + j = 0\}$

Lösning:

(a) Ja. Vi konstaterar först att $F_1 \Leftrightarrow F_2$ om sanningsvärdet för de två formlerna är samma för alla tolkningar (rader i sanningstabellen).

– Reflexiv: $F \equiv F$ eftersom F has samma sanningsvärde som sig själv.

– Transitiv: Om $F_1 \equiv F_2$ och $F_2 \equiv F_3$ så har F_1, F_2 och F_3 samma sanningsvärde för alla tolkningar alltså måste $F_1 \equiv F_3$

– Symmetrisk: Om $F_1 \equiv F_2$ så gäller också $F_2 \equiv F_1$ enligt definitionen av $\equiv$ på mängden av satslogiska formler.

(b) R innehåller endast ett element: $(0, 0)$. Alltså är R inte reflexiv och därmed inte en ekvivalensrelation.

3. Betrakta relationen $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som definieras enligt

$$R = \{(i, j) \mid \exists n, m \in \mathbb{N}[i - 3n = j - 3m]\}$$

(a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

(b) Karakterisera (beskriv) ekvivalensklasserna $[0], [1], [2]$

Lösning:

Betrakta relationen $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ som definieras enligt

$$R = \{(i, j) \mid \exists n, m \in \mathbb{N}[i - 3n = j - 3m]\}$$

(a) Vi behöver visa reflexivitet, transitivitet och symmetri:

– Reflexiv: Låt i vara ett godtyckligt tal i $\mathbb{N}$. Då finns det tal n och m nämligen $n = m = 0$ sådana att $i - 3n = i - 3 \cdot 0 = i = i - 3 \cdot 0 = i - 3m$. Alltså är $(i, i) \in R$.

– Transitiv: Låt i, j, k vara godtyckliga tal i $\mathbb{N}$ sådana att $(i, j) \in R$ och $(j, k) \in R$. Då finns det heltal $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$ sådana att

$$i - 3n = j - 3m \text{ och } j - 3n' = k - 3m'$$

Vi kan skriva om dessa uttryck till

$$i - 3n + 3m = j \text{ och } j = k - 3m' + 3n'$$

Kombinerar vi dessa (elimineras j) får vi:

$$i - 3n + 3m = k - 3m' + 3n'$$

Skriver om:

$$i - 3(n + n') = k - 3(m + m')$$

Eftersom $n, m, m', n' \in \mathbb{N}$ är även $(n + n') \in \mathbb{N}$ och $(m + m') \in \mathbb{N}$. Alltså är $(i, k) \in R$ och R är därmed transitiv.

– Symmetri: Om $(i, j) \in R$ så finns $n, m \in \mathbb{N}$ sådana att $i - 3n = j - 3m$ vilket av definitionen ger att även $(j, i) \in R$

(b) – $[0] = \{0, 3, 6, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}[3k = n]\}$

– $[1] = \{1, 4, 7, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}[3k + 1 = n]\}$

– $[2] = \{2, 5, 8, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}[3k + 2 = n]\}$

4. (Tidigare tentauppgift.) Antag att S är följande relation på $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Ange den minsta ekvivalensrelationen T på A som uppfyller villkoret $S \subseteq T$. Med "minsta" avses den relation som har minst antal par.

Lösning:

För att T ska kunna vara en ekvivalensrelation måste den vara reflexiv, vilket innebär att alla dubbelpar måste ingå. Vi lägger därför till de saknade dubbelparen. Då får vi:

$$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}.$$

För att T ska vara en ekvivalensrelation måste den även vara symmetrisk. Vi lägger därför till de spegelvända par som saknas. Då blir:

$$T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Slutligen måste T vara transitiv. Det är den, eftersom alla par i T antingen är dubbelpar eller förekommer tillsammans med sina spegelvända par, vilket inte ger upphov till nya transitiva kedjor som kräver ytterligare par. Därför är T transitiv.

T är alltså reflexiv, symmetrisk och transitiv, vilket innebär att T är en ekvivalensrelation. Det är dessutom den minsta ekvivalensrelationen som innehåller de ursprungliga paren, eftersom vi endast har lagt till de par som är nödvändiga.

• Extra uppgifter.

1. Låt $P \subseteq A \times A$ och $Q \subseteq A \times A$ vara två godtyckliga ekvivalensrelationer. Visa att också $P \cap Q$ måste vara en ekvivalensrelation. Gäller detsamma för $P \cup Q$?
2. Antag att $R \subseteq A \times A$ är en partialordning på A . Antag vidare att $P \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ är definierad enligt följande

$$(x_1, x_2)P(y_1, y_2) \text{ om } x_1 R y_1 \text{ och } x_2 R y_2.$$

Visa eller motbevisa att P är en partialordning på $A \times A$.