

Lösningsförslag för TDDC75 - Lektion 5

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningsförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

- Obligatoriska uppgifter:

1. Låt $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Vad är resultatet av följande uttryck?

- (a) 2^A (tidigare uppgift, Lektion 3-4/8e)

Lösning. $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$

- (b) $2^\emptyset$

Lösning. $2^\emptyset = \{\emptyset\}$

2. Antag att $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Vad blir resultatet av följande uttryck givet att universum är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

- (a) $|2^A|$ (tidigare uppgift, Lektion 3-4/9b)

Lösning. 8

- (b) $2^{A \cap B}$ (tidigare uppgift, Lektion 3-4/9d)

Lösning. $2^{A \cap B} = 2^{\{1, 2, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\}} = 2^{\{2, 5\}} = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$

- (c) $2^{A \cap B} \setminus \emptyset$

Lösning. Differensen mellan två mängder betyder att element i den andra mängden tas bort från den första mängden. Eftersom den andra mängden är tomma mängden som har inga element blir resultatet $2^{A \cap B} \setminus \emptyset = 2^{A \cap B}$.

3. Vad blir resultatet av följande uttryck om (i) $A = B = \emptyset$, (ii) $A = B = \{1\}$, (iii) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$

- (a) $2^{|A|}$

Lösning.

(i) $|A| = 0, 2^{|A|} = 2^0 = 1$

(ii) $|A| = 1, 2^{|A|} = 2^1 = 2$

(iii) $|A| = 1, 2^{|A|} = 2^1 = 2$

- (b) $2^A \setminus 2^B$

Lösning.

(i) $2^A \setminus 2^B = 2^\emptyset \setminus 2^\emptyset = \emptyset$

(ii) $2^A \setminus 2^B = 2^{\{1\}} \setminus 2^{\{1\}} = \emptyset$

(iii) $2^A \setminus 2^B = 2^{\{1\}} \setminus 2^{\{1, 2\}} = \{\emptyset, \{1\}\} \setminus \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = \emptyset$

- (c) $|2^{A \setminus B}|$

Lösning.

(i) $|2^{A \setminus B}| = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$

(ii) $|2^{A \setminus B}| = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$

(iii) $|2^{A \setminus B}| = |2^\emptyset| = |\{\emptyset\}| = 1$

4. (tidigare uppgift, Lektion 3-4/10abc, 12ab) Visa eller motbevisa var och en av följande likheter där A , B och C är godtyckliga mängder till ett universum $\mathcal{U}$ och $\setminus$ betecknar mängddifferens. (Försök använda omskrivning där det är tillämplig.)

- (a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

Lösning. Likheten gäller. Vi börjar med att konstatera att $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (Differenslagen), och använder sedan de associativa och kommutativa lagarna för snitt:

VL = $(A \setminus B) \setminus C = /2x \text{ Differenslagen}/ = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = /Associativa lagen/ = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = /Kommutativa lagen/ = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) = /Associativa lagen/ = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = /2x \text{ Differenslagen}/ = (A \setminus C) \setminus B = \text{HL. VSV.}$

- (b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

Lösning. Likheten gäller. Vi skriver åter om till annan form och använder distributiva lagen och DeMorgan för mängder:

$VL = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = /2x \text{ Differenslagen}/ = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = /Distributiva lagen/ = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = /De Morgan/ = A \cap \overline{(B \cap C)} = /Differenslagen/ = A \setminus (B \cap C) = HL. VSV.$

(c) $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B$.

Lösning. Falskt. Låt $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$. Då gäller att

- $A \setminus B = \{0\} \setminus \{1\} = \{0\}$
- $VL: 2^{A \setminus B} = 2^{\{0\}} = \{\emptyset, \{0\}\}$ (Alltså gäller att $\emptyset \in 2^{A \setminus B}$)
- $2^A = \{\emptyset, \{0\}\}$
- $2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$
- $HL: 2^A \setminus 2^B = \{\emptyset, \{0\}\} \setminus \{\emptyset, \{1\}\} = \{\{0\}\}$

Sammanfattningsvis: $2^{A \setminus B} = \{\emptyset, \{0\}\} \neq \{\{0\}\} = 2^A \setminus 2^B$, alltså gäller inte påståendet.

(d) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$

Lösning. Falskt. Vi visar med ett motexempel. Låt $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = B = \{0\}$. Då blir

$$A \setminus B = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$$

medan

$$\overline{B \setminus A} = \overline{\{0\} \setminus \{0\}} = \overline{\emptyset} = \mathcal{U}$$

Sammanfattningsvis: $A \setminus B = \emptyset \neq \mathcal{U} = \overline{B \setminus A}$, alltså gäller inte påståendet.

(e) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Lösning. Sant.

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap (B \setminus A) &= /2x \text{ Differenslagen}/ = \\ &= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = /Kommutativa och associativa lagarna/ = \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B}) = /2x Inversa lagarna/ = \\ &= \emptyset \cap \emptyset = /Idempotens eller Dominans/ \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

VSV.

5. Låt A, B och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder till ett universum $\mathcal{U}$ och $\setminus$ betecknar mängddifferens. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar.

(a) $(A \cup B) \cap \overline{B} = A$

Lösning. Likheten gäller ibland.

Om vi börjar med omskrivningen av VL får vi:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap \overline{B} &= /Kommutativa och Distributiva lagarna/ = (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B) = /Inversa lagarna/ = \\ &= (\overline{B} \cap A) \cup \emptyset = /Identitetslagarna/ = \overline{B} \cap A = /Kommutativa lagarna och Differenslagen/ = \\ &= A \setminus B. \end{aligned}$$

Om snittet mellan A och B är tomt blir $A \setminus B$ lika med A men om deras snittet inte är tomt är det inte lika med varandra.

Låt $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, och $\mathcal{U} = \{1, 2\}$. Då gäller att $(A \cup B) \cap \overline{B} = (\{1\} \cup \{2\}) \cap \overline{\{2\}} = \{1, 2\} \cap \{1\} = \{1\}$ som är lika med A .

Om vi låter $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, och $\mathcal{U} = \{1, 2\}$, blir $(A \cup B) \cap \overline{B} = (\{1, 2\} \cup \{2\}) \cap \overline{\{2\}} = \{1, 2\} \cap \{1\} = \{1\}$ som inte är lika med A .

(b) $|A \cup B| = |A| + |B|$

Lösning. Likheten gäller ibland.

Detta påståendet stämmer endast om $A \cap B = \emptyset$.

Låt $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Då gäller att $|A \cup B| = |\{1\} \cup \{2\}| = |\{1, 2\}| = 2 = 1 + 1 = |A| + |B|$.

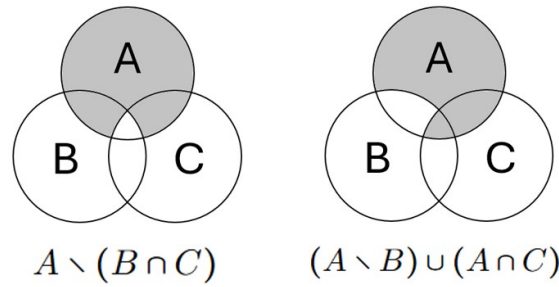
Däremot om $A = B = \{1\}$ gäller det att $|A \cup B| = |\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1 \neq 2 = 1 + 1 = |A| + |B|$.

(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

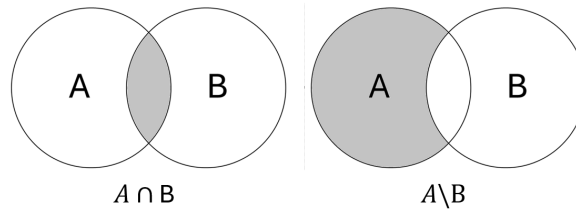
Lösning. Det gäller ibland.

Låt oss illustrera problemet med hjälp av ett Venn-diagram för att avgöra om de två sidorna är lika (se figur 1).

Det framgår tydligt att de två gråa områden inte är samma vilket innebär att svaret kommer att vara ibland. Låt oss skapa två exempel där ett av dem har några element i skillnadig delen - t.ex. mängden av element som tillhör både A och B , men inte C .



Figur 1: Uppgift 5c



Figur 2: Uppgift 5d

Anta att $A = B = C = \{1\}$. Då är $B \cap C = \{1\}$ och $(A \setminus (B \cap C)) = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$. Samtidigt är $A \setminus B = \emptyset$, $A \cap C = \{1\}$, och $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$ vilket innebär att VL inte är lika med HL.

Däremot, om $A = B = \{1\}$, $C = \{2\}$, så är $B \cap C = \emptyset$ och $(A \setminus (B \cap C)) = \{1\} \setminus \emptyset = \{1\}$. Samtidigt är $A \setminus B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, och $(A \setminus B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ vilket innebär att VL = HL.

- (d) $A \cap B \subseteq A \setminus B$

Lösning. Det gäller ibland.

Låt oss använda samma metod som i lösningen av första uppgiften.

Utifrån Vendiagrammet (se figur 2) framgår det att vänstra ledets och högra ledets områden inte har några gemensamma element. Detta innebär att om VL innehåller minst ett element, så är det inte en delmängd av HL. Om VL däremot är tomma mängden, så är den en delmängd av HL.

Anta att $A = B = \{1\}$. Då är $A \cap B = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{1\} = \emptyset$. Detta innebär att VL $\not\subseteq$ HL eftersom $\{1\} \not\subseteq \emptyset$.

Däremot, om $A = \{1\}$ och $B = \{2\}$, så är $A \cap B = \{1\} \cap \{2\} = \emptyset$ och $A \setminus B = \{1\} \setminus \{2\} = \{1\}$. I detta fall är vänstra ledet en delmängd av högra ledet eftersom tomma mängden är en delmängd av alla mängder, $\emptyset \subseteq \{1\}$.

- (e) $\overline{A \cup B} \setminus C = (\overline{A \cap B}) \cap C$

Lösning. Det gäller ibland.

Vi använder igen Venndiagram.

Utifrån Venndiagrammet framgår att de två områdena inte är samma om det finns något element i universalmängden som inte tillhör mängderna A, B eller C (se figur 3). Däremot är de två områdena lika om båda är den tomma mängden.

Om $A = B = C = \mathcal{U} = \{1\}$. Då gäller följande:

$\overline{A \cup B} \setminus C = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \{1\} = \overline{\{1\}} \setminus \{1\} = \emptyset \setminus \{1\} = \emptyset$ och $(\overline{A \cap B}) \cap C = (\overline{\{1\} \cap \{1\}}) \cap \{1\} = \overline{\{1\}} \cap \{1\} = \emptyset \cap \{1\} = \emptyset$. Detta innebär att VL = HL.

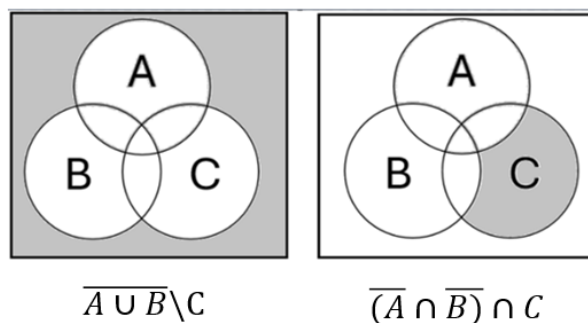
Däremot, om $\mathcal{U} = \{1, 2\}$, $A = B = \{1\}$, och $C = \{2\}$ då gäller följande:

$\overline{A \cup B} \setminus C = \overline{\{1\} \cup \{1\}} \setminus \{2\} = \overline{\{1\}} \setminus \{2\} = \{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$ och $(\overline{A \cap B}) \cap C = (\overline{\{1\} \cap \{1\}}) \cap \{2\} = \overline{\{1\}} \cap \{2\} = \{2\} \cap \{2\} = \{2\}$. I detta fall VL $\neq$ HL eftersom $\emptyset \neq \{2\}$.

- (f) $2^A \setminus 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$

Lösning. Det gäller ibland.

Låt oss betrakta påståendet. Påståendet är falskt om det finns en mängd som är med $2^A \setminus 2^B$ men inte med $2^{A \cap B}$. Eftersom den tomma mängden är med alla potensmängden,



Figur 3: Uppgift 5e

räcker den inte som en motexempel. Det innebär att vi måste hitta en icke-tomma mängd. En icke-tomma mängd är med $2^A \setminus 2^B$ om det är en delmängd av 2^A men inte en delmängd av 2^B . Det innebär att A har minst ett element som inte tillhör B . Låt $A = \{1\}$ och $B = \{2\}$. Då är $2^A = \{\{1\}, \emptyset\}$, $2^B = \{\{2\}, \emptyset\}$, och $2^A \setminus 2^B = \{\{1\}\}$. Samtidigt är HL:et $2^{A \cap B} = 2^{\{1\} \cap \{2\}} = 2^\emptyset = \{\emptyset\}$. Det innebär att VL är inte lika med HL.

Däremot, om $A = B = \{1\}$ så $2^A = 2^B$ då VL blir $2^A \setminus 2^B = \emptyset$. Eftersom tomma mängden är en delmängd av alla mängder, gäller påståendet (så länge högre ledet blir en välbildade mängd som det är: $2^{A \cap B} = 2^{\{1\} \cap \{1\}} = 2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$).

- (g) $|A| - |B| \leq |A \setminus B|$

Lösning. Det gäller alltid.

Eftersom $A \setminus B$ består av element som tillhör A men inte B , antalet element i $A \setminus B$ är antalet element i A minus antalet element i snitt av A och B : $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$. Då blir vår olikhet $|A| - |B| \leq |A| - |A \cap B|$. Eftersom $A \cap B$ är en delmängd av B har B fler element än eller lika många element som $A \cap B$ alltså $|A \cap B| \leq |B|$. Det innebär att $|A| - |B|$ blir mindre än eller lika med $|A| - |A \cap B|$ eftersom vi subtraherar ett mindre tal från $|A|$ inom HL. Därför gäller olikheten alltid. VSV.

• Rekommenderade uppgifter:

- (tidigare uppgift, Lektion 3-4/11abc) Definiera den *symmetriska differensen* Δ mellan mängder på vanligt sätt, dvs. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, där $\setminus$ betecknar vanlig mängddifferens. Visa att följande likheter gäller för godtyckliga mängder A och B .

- $A \Delta \emptyset = A$
- $A \Delta B = B \Delta A$
- $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$

(Se lösningsförslag för Lektion 3-4.)

- Låt A, B och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder) genom att använda venndiagram.

- (Från boken.) Om $A \cap C = B \cap C$ och $A \cup B = B \cup C$, så är $A = B$.
- (Från boken.) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \setminus (A \cap \overline{C})$

• Extra uppgifter.

- Låt A och B vara två godtyckliga mängder till ett universum $\mathcal{U}$ och $\setminus$ betecknar mängddifferens. Är det följande påståendet sant? $(A \cap B = \emptyset) \rightarrow (B \subseteq A)$
- (Från boken.) Låt $\mathcal{U}$ vara ett universum. Visa att det för varje mängd $A \subseteq \mathcal{U}$ finns precis en mängd $X \subseteq \mathcal{U}$ sådan att $A \Delta X = \mathcal{U}$.
- Är det möjligt att rita en Venn-diagramm med fyra mängder, A, B, C och D ?
- Antag att $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och $A = \{3, 4\}$. Rita ett Venn-diagram som illustrerar 2^A .

5. (Tidigare uppgift.) En ond kung dömer två fångar att varje morgon kasta ett mynt och, när det landar, gissa resultatet av den andra fångens kast. Om båda har fel avrättas de. De har några minuter på sig att komma överens om en strategi, men efter det kommer de inte att kunna kommunicera på något sätt, så de kommer inte att kunna berätta resultatet av kastningen för den andra. Finns det en strategi som gör att de kan överleva? (oavsett resultatet av kastningen)

- Låt oss kalla fångarna A och B.
- Låt A_kast vara en satsvariabel som är sann om A kastade en krona och falsk om A kastade en klave.
- Låt B_kast vara en satsvariabel som är sann om B kastade en krona och falsk om B kastade en klave.
- Låt A_Giss vara en satsvariabel som är sann om A gissade en krona och falsk om A gissade en klave.
- Låt B_Giss vara en satsvariabel som är sann om B gissade en krona och falsk om B gissade en klave.

Hur ser ut en satslogisk formel som är sann om och endast om A gissade rätt vad B kastade?
Hur ser ut en satslogisk formel som är sann om och endast om B gissade rätt vad A kastade?
Fyll in i sanningstabell nedan.

A_kast	B_kast	A_Giss	B_Giss	Formel 1	Formel 2	en av dem gissade rätt
1	1	1	1			
1	1	1	0			
1	1	0	1			
1	1	0	0			
1	0	1	1			
1	0	1	0			
1	0	0	1			
1	0	0	0			
0	1	1	1			
0	1	1	0			
0	1	0	1			
0	1	0	0			
0	0	1	1			
0	0	1	0			
0	0	0	1			
0	0	0	0			