

Lektionsuppgifter för TDDC75 - Lektion 3 och 4

Detta dokument är baserat på arbeten av Mikael Asplund, Asratien et al., samt tidigare tentor.

1. Visa genom att hitta ett motexempel att följande slutledningar INTE är giltiga. Ett motexempel är en tolkning där alla förutsättningar (premiss) är sanna, men den (önskade) slutsatsen är falsk. Obligatoriska uppgifter:

- (a) $p, (p \rightarrow q \vee r) \models q$
- (b) $(p \wedge \neg q), (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \models \neg r$

Rekommenderade uppgifter:

- (a) $(p \vee q), (p \rightarrow r) \models r$
- (b) $(p \leftrightarrow q), (q \rightarrow r), (r \vee \neg s), (\neg s \rightarrow q) \models s$

2. Använd logisk konsekvensreglerna (deduktion) för att härleda följande:

- Obligatoriska uppgifter.

- (a) $(p \wedge q), (p \rightarrow r) \models r$
- (b) $(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (p \vee r) \models q \vee s$
- (c) $p, (p \rightarrow q), r \models p \vee q \rightarrow r$

- Rekommenderade uppgifter.

- (a) $p \wedge q \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- (b) $s, (s \rightarrow t), (\neg t \vee u) \models u$

- Extra uppgifter.

- (a) Bevisa att Modus ponens är en giltig logisk konsekvens utan att använda Modus ponens.
- (b) Bevisa att $p \leftrightarrow q \models (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Notera att $p \equiv q$ omm $p \models q$ och $q \models p$.

3. En av möjligheterna vid ett deduktionsbevis är så kallad indirekt härledning, eller motsägelsebevis. Ett exempel på detta är följande bevis för att $(p \rightarrow q), (q \rightarrow r), \neg r \models \neg p$:

- | | | |
|------|-------------------|---------------------------------|
| (1) | $p \rightarrow q$ | Premiss |
| (2) | $q \rightarrow r$ | Premiss |
| (3) | $\neg r$ | Premiss |
| (4) | $\neg \neg p$ | Hypotes |
| (5) | p | (4) och dubbel negation |
| (6) | q | (5), (1) och Modus ponens |
| (7) | r | (6), (2) och Modus ponens |
| (8) | $r \wedge \neg r$ | (3), (7) och konjunktionsregeln |
| (9) | 0 | (8) och inversa lagen |
| (10) | $\neg p$ | (4)-(9) och Motsägelseregeln |

Notera att raderna 4-9 är inskjutna för att markera att de behandlar en hypotes. Detta kan även markeras med linjer el dylikt.

Använd motsägelsebevis för att bevisa följande:

- Obligatoriska uppgifter:

- (a) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \models \neg p$ (utan att använda kontrapositiva lagen)
- (b) Vad som helst kan härledas från ett falskt påstående, exempelvis: $p \wedge \neg p \models q$
- (c) $(\neg p \leftrightarrow r) \models (p \rightarrow p)$
- (d) $((q \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \models \neg q$

- Rekommenderade uppgifter:

- (a) $(\neg q \vee r) \models (p \leftrightarrow p)$
- (b) $((p \wedge q) \wedge q) \models (p \vee p)$

4. Översätt följande påståenden till predikatlogiska formler:

- (a) Alla bilar har fyra hjul.
- (b) Ingen kan vara förälder till sig själv.
- (c) Antingen är alla bollar svarta eller så är ingen boll svart.

5. Ange för följande påståenden domäner för x och y så att påståendet är en tautologi.

- (a) $\forall x \exists y [x + y = x]$
- (b) $\forall x \exists y [y^2 = x]$
- (c) $\forall x \forall y [x = y]$
- (d) $\forall x \forall y [x < y]$
- (e) $\exists x \forall y [x^2 = y]$

6. Förenkla följande uttryck:

- (a) $\{A, B, C\} \cup \{C, D\}$
- (b) $\{A, B, C\} \cap \{C, D\}$
- (c) $\{A, B, C\} \cup \{\{C, D\}\}$
- (d) $\{A, B, C\} \cap \{\{C, D\}\}$
- (e) $\{A, B, C\} \cup \emptyset$
- (f) $\{A, B, C\} \cup \{\emptyset\}$

7. Bestäm kardinaliteten av följande mängder:

- (a) $\{1, 2, 3\}$
- (b) $\{a, b, c\}$
- (c) $\{\}$
- (d) $\emptyset$
- (e) $\{0, \{1, 2\}\}$
- (f) $\{B, \emptyset, \{\emptyset\}\}$

8. Låt $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ och $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Vad är resultatet av följande uttryck:

- (a) $A \cup B$
- (b) $A \cap B$
- (c) $A \setminus B$
- (d) $B \setminus A$
- (e) 2^A

9. Antag att $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Vad blir resultatet av följande uttryck givet att universum är $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

- (a) $\overline{A} \cap \overline{B}$
- (b) $|2^A|$
- (c) $|A \times B|$
- (d) $2^{A \cap B}$
- (e) $A \cup \overline{B}$

10. Visa eller motbevisa var och en av följande likheter, där “ $\setminus$ ” betecknar mängddifferens:

- (a) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B.$
- (b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$
- (c) $2^{A \setminus B} = 2^A \setminus 2^B.$

11. Låt A och B vara två mängder om vilka vi vet att

$$|A \cup B| \leq 2|A \cap B|.$$

- (a) Kan endera eller båda av mängderna A och B vara tomma mängden?
 - (b) Kan A och B vara samma icke-tomma mängd?
 - (c) Om $|A| = |B| = 10$, hur många gemensamma element måste då A och B minst ha?
12. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och antingen bevisa eller motbevisa påståendena:
- (a) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$
 - (b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

13. Rekommenderade uppgift. Definiera den *symmetriska differensen* Δ mellan mängder på vanligt sätt, dvs. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, där $\setminus$ betecknar vanlig mängddifferens). Visa att följande likheter gäller för godtyckliga mängder A och B .

- (a) $A \Delta \emptyset = A$
 - (b) $A \Delta B = B \Delta A$
 - (c) $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
14. Extra uppgift. Den här var en extra uppgift till lektion 1. Översätt uppgiften till satslogiska formler och skapa en sanningstabell för dem.
En ond kung dömer två fångar att varje morgon kasta ett mynt och, när det landar, gissa resultatet av den andra fångens kast. Om båda har fel avrättas de. De har några minuter på sig att komma överens om en strategi, men efter det kommer de inte att kunna kommunicera på något sätt, så de kommer inte att kunna berätta resultatet av kastningen för den andra. Finns det en strategi som gör att de kan överleva? (oavsett resultatet av kastningen)
15. Extra uppgift. Översätt spelet riddare och skurkar — med tre personer, där svaren frågan 'Hur många riddare finns bland er?' är 1, 3, 3 — till satslogiska formler och skapa en sanningstabell för dem.
16. Extra uppgift. Det här är ett logikpussel från Raymond Smullyans bok 'What is the name of this book?'
Översätt frågan till en satslogisk uppgift utifrån beskrivningen (à la Google Translate) :
Shakespeares Merchant of Venice hade Portia tre lådor — guld, silver och bly — inuti ett av dem fanns Portias porträtt. Friaren skulle välja ett av lådorna, och om han hade turen (eller klok nog) att välja det med porträttet, kunde han göra anspråk på Portia som sin brud. På locket till varje låda fanns en inskription för att hjälpa friaren att välja klokt.
Anta nu att Portia ville välja sin man inte på grundval av dygd, utan helt enkelt på grundval av intelligens. Hon lät sätta följande inskriptioner på lådorna.
Guld: Porträttet är i detta låda.
Silver: Porträttet är inte i denna låda.
Bly: Porträttet är inte i guldlåda.

Portia förklarade för friaren att av de tre påståendena var högst ett sant.
Vilket låda skulle friaren välja?