

Lösningssförslag TDDC75 - Lektion 3 och 4

Detta dokument är baserat på arbeten av Mikael Asplund, Asratien et al., samt tidigare tentor. Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningssförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

1. Visa genom att hitta ett motexempel att de följande slutledningar inte är giltiga.

Obligatoriska uppgifter:

- (a) $p, (p \rightarrow q \vee r) \models q$
Om $p = 1, r = 1, q = 0$ är premisser sanna men slutsatsen blir falsk.
- (b) $(p \wedge \neg q), (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \models \neg r$
Om $p = 1, q = 0, r = 1$ är premisser sanna men slutsatsen är falsk.

Rekommenderade uppgifter:

- (a) $(p \vee q), (p \rightarrow r) \models r$
Om $p = 0, q = 1, r = 0$ är premisser sanna men slutsatsen är falsk.
- (b) $(p \leftrightarrow q), (q \rightarrow r), (r \vee \neg s), (\neg s \rightarrow q) \models s$
Om $p = 1, q = 1, r = 1, s = 0$ är premisser sanna men slutsatsen är falsk.

2. Använd deduktion för att härleda följande:

- Obligatoriska uppgifter.

- (a) Bevis för att $(p \wedge q), (p \rightarrow r) \models r$:

- (1) $p \wedge q$ Premiss
- (2) $p \rightarrow r$ Premiss
- (3) p (1) och Konjunktiv förenkling
- (4) r (2) och (3) och Modus ponens

Av steg (1)-(4) följer att $(p \wedge q), (p \rightarrow r) \models r$. VSV

- (b) Bevis för att $(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (p \vee r) \models q \vee s$:

- (1) $p \rightarrow q$ Premiss
- (2) $r \rightarrow s$ Premiss
- (3) $p \vee r$ Premiss
- (4) $\neg(\neg p) \vee r$ (3) och Dubbelnegation
- (5) $\neg p \rightarrow r$ (4) och Implikationslagen
- (6) $\neg q \rightarrow \neg p$ (1) och Kontrapositiva lagen
- (7) $\neg q \rightarrow r$ (6), (5) och Syllogism
- (8) $\neg q \rightarrow s$ (7), (2) och Syllogism
- (9) $\neg(\neg q) \vee s$ (8) och Implikationslagen
- (10) $q \vee s$ (9) och Dubbelnegation

Av steg (1)-(10) följer att $(p \rightarrow q), (r \rightarrow s), (p \vee r) \models q \vee s$. VSV

- (c) Bevis för att $p, (p \rightarrow q), r \models p \vee q \rightarrow r$:

- (1) p Premiss
- (2) $p \rightarrow q$ Premiss
- (3) r Premiss
- (4) $\neg(p \vee q) \vee r$ (3) och Disjunktiv förstärkning
- (5) $\neg(\neg(p \vee q)) \rightarrow r$ (4) och Implikationslagen
- (6) $p \vee q \rightarrow r$ (1) och Dubbelnegation

Av steg (1)-(6) följer att $p, (p \rightarrow q), r \models p \vee q \rightarrow r$. VSV

- Rekommenderade uppgifter.

- (a) Bevis för $p \wedge q \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$:

- (1) $p \wedge q \rightarrow r$ Premiss
- (2) $\neg(p \wedge q) \vee r$ (1) och Implikationslagen
- (3) $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ (2) och De Morgans lagen
- (4) $\neg p \vee (\neg q \vee r)$ (3) och Associativa lagen
- (5) $\neg p \vee (q \rightarrow r)$ (4) och Implikationslagen
- (6) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ (5) och Implikationslagen

Av steg (1)-(6) följer att $p \wedge q \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$. VSV

(b) Bevis för $s, (s \rightarrow t), (\neg t \vee u) \models u$

- (1) s Premiss
- (2) $s \rightarrow t$ Premiss
- (3) $\neg t \vee u$ Premiss
- (4) t (1), (2) och Modus ponens
- (5) $t \rightarrow u$ (3) och Implikationslagen
- (6) u (4), (5) och Modus ponens

Av steg (1)-(6) följer att $s, (s \rightarrow t), (\neg t \vee u) \models u$. VSV

• Extra uppgifter.

(a) Bevisa att Modus ponens är en giltig logisk konsekvens utan att använda Modus ponens.

(b) Bevisa att $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$. Notera att $p \equiv q$ om $p \models q$ och $q \models p$.

3. Använd motsägelsebevis för att bevisa följande:

• Obligatoriska uppgifter:

(a) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \models \neg p$ (utan att använda kontrapositionen)

- (1) $(p \rightarrow q) \wedge \neg q$ Premiss
- (2) $p \rightarrow q$ (1) och konjunktiv förenkling
- (3) $\neg q$ (1) och konjunktiv förenkling
- (4) p Hypotes
- (5) q (2), (4) och Modus ponens
- (6) $q \wedge \neg q$ (5), (3) och Konjunktionsregeln
- (7) 0 (6) och Inversa lagen
- (8) $\neg p$ Följer av steg (4)-(7) och Motsägelserregeln

Steg (1) - (8) ger att $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \models \neg p$

(b) Vad som helst kan härledas från ett falskt påstående, exempelvis: $p \wedge \neg p \models q$

- (1) $p \wedge \neg p$ Premiss
- (2) $\neg q$ Hypotes
- (3) 0 Följer av (1) och Inversa lagen
- (4) q Följer av steg (2)-(3) och Motsägelserregeln

Steg (1)-(4) ger att $p \wedge \neg p \models q$. VSV.

(c) $(\neg p \leftrightarrow r) \models (p \rightarrow p)$

- (1) $\neg(p \rightarrow p)$ Hypotes
- (2) $\neg(\neg p \vee p)$ (1) och Implikationslagen
- (3) $\neg 1$ (2) och Inversa lagen
- (4) 0 (3) och axiom i satslogiken
- (5) $p \rightarrow p$ (1)-(4) och Motsägelserregeln

Av steg (1)-(5) framgår att $(\neg p \leftrightarrow r) \models (p \rightarrow p)$ VSV.

(d) $((q \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \models \neg q$

- (1) $(q \rightarrow q) \rightarrow \neg q$ Premiss
- (2) $\neg \neg q$ Hypotes
- (3) $\neg(q \rightarrow q)$ (1), (2) och Modus tollens
- (4) $\neg(\neg q \vee q)$ (3) och Implikationslagen
- (5) $\neg 1$ (4) och Inversa lagen
- (6) 0 (5) och axiom i satslogiken
- (7) $\neg q$ (2)-(6) och Motsägelserregeln

Av steg (1)-(7) framgår att $((q \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \models \neg q$, VSV.

- Rekommenderade uppgifter:

- (a) $(\neg q \vee r) \models (p \leftrightarrow p)$
- | | | |
|-----|--|-------------------------------|
| (1) | $\neg(p \leftrightarrow p)$ | Hypotes |
| (2) | $\neg((p \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow p))$ | (1) och ekvivalenslagen |
| (3) | $\neg(p \rightarrow p)$ | (2) och Idempotens |
| (4) | $\neg(\neg p \vee p)$ | (3) och Implikationslagen |
| (5) | $\neg 1$ | (4) och Inversa lagen |
| (6) | 0 | (5) och axiom i satslogiken |
| (7) | $p \leftrightarrow p$ | (1)-(6) och Motsägelserregeln |

Av steg (1)-(7) följer att $(\neg q \vee r) \models (p \leftrightarrow p)$.

- (b) $((p \wedge q) \wedge q) \models (p \vee p)$
- | | | |
|-----|---------------------------|--------------------------------|
| (1) | $((p \wedge q) \wedge q)$ | Premiss |
| (2) | $(p \wedge q)$ | (1) och Konjunktiv förenkling |
| (3) | p | (1) och Konjunktiv förenkling |
| (4) | $\neg(p \vee p)$ | Hypotes |
| (5) | $\neg p \wedge \neg p$ | (4) och De Morgans lag |
| (6) | $\neg p$ | (5) och Konjunktiv förenkling |
| (7) | $p \wedge \neg p$ | (3),(6) och Konjunktionsregeln |
| (8) | 0 | (7) och Inversa lagen |
| (9) | $p \vee p$ | (4)-(8) och Motsägelserregeln |

Av steg (1) - (9) följer att $((p \wedge q) \wedge q) \models (p \vee p)$. VSV. Obs att vi i detta fall hade kunnat gå enklare fram med disjunktiv förstärkning, men vi använder motsägelserregeln för att träna på att använda den.

4. Översätt följande påståenden till predikatlogiska formler:

- (a) Alla bilar har fyra hjul.

Lösningsförslag: Vi gör två formaliseringar av detta. En enkel och en komplicerad:

- Enkel, låt $FH(x)$ vara predikatet som säger att ett objekt har fyra hjul och $B(x)$ vara ett predikat som säger att x är en bil: $\forall x[B(x) \rightarrow FH(x)]$.
- Komplicerat. Låt $H(x, y)$ vara ett predikat som säger att y är ett hjul på fordonet x : $\forall x[B(x) \rightarrow \exists y_1, y_2, y_3, y_4[H(x, y_1) \wedge H(x, y_2) \wedge H(x, y_3) \wedge H(x, y_4) \wedge (y_1 \neq y_2) \wedge (y_1 \neq y_3) \wedge (y_1 \neq y_4) \wedge (y_2 \neq y_3) \wedge (y_2 \neq y_4) \wedge (y_3 \neq y_4)]]$

- (b) Ingen kan vara förälder till sig själv.

Lösningsförslag: Låt $F(x, y)$ vara ett predikat som säger att x är förälder till y : $\forall x[\neg F(x, x)]$.

- (c) Antingen är alla bollar svarta eller så är ingen boll svart.

Lösningsförslag: Låt $B(x)$ vara ett predikat som säger att x är en boll och $S(x)$ vara predikat som säger att x är svart:

$$\forall x[B(x) \rightarrow S(x)] \vee \neg \exists x[B(x) \wedge S(x)]$$

5. Ange för följande påståenden domäner för x och y så att påståendet är en tautologi.

- (a) $\forall x \exists y[x + y = x]$
 (b) $\forall x \exists y[y^2 = x]$
 (c) $\forall x \forall y[x = y]$
 (d) $\forall x \forall y[x < y]$
 (e) $\exists x \forall y[x^2 = y]$

Lösningsförslag:

- (a) Låt domänen för x och y vara de naturliga talen. För alla x finns då ett tal $y = 0$ sådan att $x + y = x$
- (b) Låt domänen för x och y vara de icke-negativa talen $[0, \infty)$, för alla x finns då ett tal $y = \sqrt{x}$ sådan att $y^2 = x$.
- (c) Eftersom x och y ska vara lika för alla x och y , kan det finnas som mest ett element i domänen. Till exempel kan domänen bestå enbart av talet 1.

- (d) Här kan vi låta x och y ha olika domäner. Låt x ha domänen av alla negativa heltal, och y ha domänen av alla positiva heltal (i båda fallen utesluter vi talet 0).
- (e) Notera ordningen på kvantifierarna. Det finns ett x sådant att för alla y så är $x^2 = y$. Eftersom det enast är ett värde av x så måste domänen för y åter vara av storleken 1. Vi kan låta domänen för y vara talet 1 och domänen för x vara de naturliga talen.
6. (a) $\{A, B, C\} \cup \{C, D\} = \{A, B, C, D\}$
 (b) $\{A, B, C\} \cap \{C, D\} = \{C\}$
 (c) $\{A, B, C\} \cup \{\{C, D\}\} = \{A, B, C, \{C, D\}\}$
 (d) $\{A, B, C\} \cap \{\{C, D\}\} = \emptyset$
 (e) $\{A, B, C\} \cup \emptyset = \{A, B, C\}$
 (f) $\{A, B, C\} \cup \{\emptyset\} = \{A, B, C, \emptyset\}$
7. (a) $|\{1, 2, 3\}| = 3$
 (b) $|\{a, b, c\}| = 3$
 (c) $|\{\}| = 0$
 (d) $|\emptyset| = 0$
 (e) $|\{0, \{1, 2\}\}| = 2$
 (f) $|\{B, \emptyset, \{\emptyset\}\}| = 3$
8. (a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$
 (b) $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 2, 4\}$
 (c) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3\}$
 (d) $B \setminus A = \{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\} = \{6, 8\}$
 (e) $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 4\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 4\}, \{0, 1, 3, 4\}, \{0, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}\}$
9. (a) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3, 4, 6\} \cap \{1, 6\} = \{6\}$
 (b) $|2^A| = 2^3 = 8$, eftersom A innehåller 3 element så innehåller potensmängden 2^A : $2^3 = 8$ element
 (c) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$, eftersom kardinaliteten av kartesiska produkten av två mängder är produkten av kardinaliteten hos de ingående mängderna
 (d) $2^{A \cap B} = 2^{\{1, 2, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5\}} = 2^{\{2, 5\}} = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$
 (e) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$
10. (a) Likheten gäller. Vi börjar med att konstatera att $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (Differenslagen), och använder sedan de associativa och kommutativa lagarna för snitt
 $(A \setminus B) \setminus C = /2x \text{ Differenslagen}/ = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = /Associativa lagen/ = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) =$
 $= /Kommutativa lagen/ = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) = /Associativa lagen/ = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = /2x \text{ Differenslagen}/ =$
 $(A \setminus C) \setminus B$
 (b) Likheten gäller. Vi skriver åter om till annan form och använder distributiva lagen och DeMorgan för mängder:
 $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = /2x \text{ Differenslagen}/ = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = \text{Distributiva lagen} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) =$
 $= /De Morgan/ = A \cap \overline{(B \cap C)} = /Differenslagen/ = A \setminus (B \cap C)$
 (c) Låt $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$. Då gäller att
 • $A \setminus B = \{0\} \setminus \{1\} = \{0\}$
 • $2^{A \setminus B} = 2^{\{0\}} = \{\emptyset, \{0\}\}$ (Alltså gäller att $\emptyset \in 2^{A \setminus B}$)
 • $2^A = \{\emptyset, \{0\}\}$
 • $2^B = \{\emptyset, \{1\}\}$
 • $2^A \setminus 2^B = \{\emptyset, \{0\}\} \setminus \{\emptyset, \{1\}\} = \{\{0\}\}$

Sammanfattningsvis: $2^{A \setminus B} = \{\emptyset, \{0\}\} \neq \{\{0\}\} = 2^A \setminus 2^B$, alltså gäller inte påståendet.

11. (a) Ja! Låt $B = \emptyset$, och anta olikheten sann:

$$|A| = |A \cup B| \leq 2|A \cap B| = 2|\emptyset| = 2 \cdot 0 = 0$$

Alltså $|A| \leq 0$ vilket innebär att A då också måste vara tomma mängden

- (b) Ja! Låt $A = B = \{1\}$:

$$|A \cup B| = |\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1 \leq 2 = 2 \cdot 1 = 2|\{1\}| = 2|\{1\} \cap \{1\}| = 2|A \cap B|$$

- (c) Låt x beteckna antalet gemensamma element i A och B . Då gäller att $|A \cup B| = x + (10 - x) + (10 - x) = 20 - x$, samt att $|A \cap B| = x$.

$$|A \cup B| \leq 2|A \cap B|$$

$$\Leftrightarrow$$

$$20 - x \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$20 \leq 3x$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \geq 20/3$$

Så A och B måste ha minst 7 gemensamma element.

12. (a) Falskt. Vi visar med ett motexempel. Låt $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = B = \{0\}$. Då blir

$$A \setminus B = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$$

medan

$$\overline{B \setminus A} = \overline{\{0\} \setminus \{0\}} = \overline{\emptyset} = \mathcal{U}$$

- (b) Sant. Vi påminner om att $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$.

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) =$$

$$A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{A} =$$

$$(A \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B}) =$$

$$\emptyset \cap \emptyset =$$

$$\emptyset$$

13. (a) Vi börjar med att konstatera att $\overline{\emptyset} = \mathcal{U}$ enligt definitionen av komplement.

$$A \Delta \emptyset = (\text{def ovan})$$

$$(A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = (\text{def. av mängddifferens})$$

$$(A \cap \overline{\emptyset}) \cup (\emptyset \setminus A) = (\text{eftersom } \overline{\emptyset} = \mathcal{U})$$

$$(A \cap \mathcal{U}) \cup (\emptyset \setminus A) = (\text{Identitet})$$

$$A \cup (\emptyset \setminus A) = (\text{def. av mängddifferens})$$

$$A \cup (\emptyset \cap \overline{A}) = (\text{Dominans})$$

$$A \cup \emptyset = (\text{Identitet})$$

$$A$$

- (b) De sista två visar vi endast stegen utan motiveringar $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \overline{A \Delta B} &= \\
&\overline{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)} = \\
&\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(B \setminus A)} = \\
&\overline{(A \cap \overline{B})} \cap \overline{(B \cap \overline{A})} = \\
&\overline{(A \cup \overline{B})} \cap \overline{(\overline{B} \cup \overline{A})} = \\
&\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(\overline{B} \cup A)} = \\
&\overline{(A \cap (\overline{B} \cup A))} \cup \overline{(B \cap (\overline{B} \cup A))} = \\
&\overline{(A \cap \overline{B})} \cup \overline{(A \cap A)} \cup \overline{(B \cap \overline{B})} \cup \overline{(B \cap A)} = \\
&\overline{(A \cap \overline{B})} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \overline{(B \cap A)} = \\
&(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})
\end{aligned}$$