

Lösningförslag för TDDC75 - Lektion 2

Om du hittar ett fel i någon av uppgifterna eller i lösningförslagen, skicka ett mejl till szilvia.varro-gyapay@liu.se.

1. Obligatoriska uppgifter:

Två satslogiska formler F_1 och F_2 kallas logisk ekvivalenta (eller semantiskt ekvivalenta) och skrivs ofta $F_1 \equiv F_2$ om de har samma sanningsvärden för alla tolkningar. (I boken används $\Leftrightarrow$ istället för $\equiv$). Använd sanningstabeller för att visa lagarna nedan.

(a) De Morgans lagar:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

Vi visar den ena av De Morgans lagar:

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q):$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

V.S.V.

(b) Distributiva lagarna:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

Vi visar den ena av de Distributiva lagarna:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

p	q	r	$(q \vee r)$	$(p \wedge (q \vee r))$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

V.S.V.

(c) Inversa lagarna:

$$(p \wedge \neg p) \equiv 0$$

$$(p \vee \neg p) \equiv 1$$

Vi visar den ena av de Inversa lagarna:

$$(p \wedge \neg p) \equiv 0$$

Vi visar detta genom att sanningstabellen för vänster sida ger en motsägelse (0):

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

V.S.V.

Rekommenderade uppgifter:

(a) Absorptionslagar:

$$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$$

$$(p \vee (p \wedge q)) \equiv p$$

Vi visar den ena av de Absorptionslagar:

$$(p \wedge (p \vee q)) \equiv p$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för vänster sida ger samma värde för uttrycken som p :

p	q	$(p \vee q)$	$(p \wedge (p \vee q))$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	0

V.S.V.

(b) Kontrapositiva lagen:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Vi visar detta genom att sanningstabellerna för höger och vänster sida ger samma värde för uttrycken:

p	q	$(p \rightarrow q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

V.S.V.

2. Obligatoriska uppgifter.

Använd de logiska ekvivalenslagarna i formelbladet (se sista sidan) för att förenkla uttrycken nedan så långt som möjligt. För varje steg ange vilken lag du hänvisar till när du gör omskrivningen.

Exempel:

$$(p \wedge p) \rightarrow \neg p \equiv (\text{Idempotens})$$

$$p \rightarrow \neg p \equiv (\text{Implikation})$$

$$\neg p \vee \neg p \equiv (\text{Idempotens})$$

$$\neg p$$

(a) Förenkla uttrycket: $(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$.

Lösning:

$(p \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$(p \leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee p))$	$\equiv$	(De Morgans lag)
$(p \leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee p))$	$\equiv$	(Kommutativa lagen)
$(p \leftrightarrow ((\neg q \vee \neg p) \vee p))$	$\equiv$	(Associativa lagen)
$(p \leftrightarrow (\neg q \vee (\neg p \vee p)))$	$\equiv$	(Inversa lagen)
$(p \leftrightarrow (\neg q \vee 1))$	$\equiv$	(Dominans)
$(p \leftrightarrow 1)$	$\equiv$	(Ekvivalenslagen)
$(p \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow p)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$(\neg p \vee 1) \wedge (1 \rightarrow p)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$(\neg p \vee 1) \wedge (\neg 1 \vee p)$	$\equiv$	(Dominans)
$1 \wedge (\neg 1 \vee p)$	$\equiv$	(Identitet)
$(\neg 1 \vee p)$	$\equiv$	(Definition av negation)
$(0 \vee p)$	$\equiv$	(Identitet)
p		

- (b) Förenkla uttrycket: $((q \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$.

Lösning:

$((q \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$((\neg q \vee p) \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Inversa lagen)
$((1 \rightarrow p) \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$((\neg 1 \vee p) \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Def. av negation)
$((0 \vee p) \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Identitet)
$(p \rightarrow \neg q)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$\neg p \vee \neg q$		

3. En tautologi har sanningsvärdet 1 för alla möjliga tolkningar och är alltså logiskt ekvivalent med uttrycket 1. Visa genom OMSKRIVNINGAR (genom att använda ekvivalensreglerna) på samma sätt som förra uppgiften att följande satser är tautologier $\equiv 1$.

Obligatoriska uppgifter:

- (a) Förenkla uttrycket: $((q \wedge q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$

$((q \wedge q) \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$	$\equiv$	(Idempotens)
$(q \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$	$\equiv$	(Absorption)
$q \rightarrow q$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$\neg q \vee q$	$\equiv$	(Inversa lagen)
1		

- (b) Förenkla uttrycket: $(\neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg(p \wedge p))$

$\neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg(p \wedge p)$	$\equiv$	(Idempotens)
$\neg(r \leftrightarrow r) \rightarrow \neg p$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$\neg\neg(r \leftrightarrow r) \vee \neg p$	$\equiv$	(Dubbel negation)
$(r \leftrightarrow r) \vee \neg p$	$\equiv$	(Ekvivalenslagen)
$((r \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow r)) \vee \neg p$	$\equiv$	(Idempotens, vi betraktar $(r \rightarrow r)$ som en utsaga)
$(r \rightarrow r) \vee \neg p$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$(\neg r \vee r) \vee \neg p$	$\equiv$	(Inversa lagen)
$1 \vee \neg p$	$\equiv$	(Dominans)
1		

- (c) Förenkla uttrycket: $(q \rightarrow (q \vee (q \vee r)))$

$q \rightarrow (q \vee (q \vee r))$	$\equiv$	(Associativa lagen)
$q \rightarrow ((q \vee q) \vee r)$	$\equiv$	(Idempotens)
$q \rightarrow (q \vee r)$	$\equiv$	(Implikationslagen)
$\neg q \vee (q \vee r)$	$\equiv$	(Associativa lagen)
$(\neg q \vee q) \vee r$	$\equiv$	(Inversa lagen)
$1 \vee r$	$\equiv$	(Dominans)
1		

Rekommenderade uppgifter:

- (a) Förenkla uttrycket: $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$

$$\begin{aligned}
\neg(p \leftrightarrow \neg p) &\equiv (\text{Ekvivalenslagen}) \\
\neg((p \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
\neg((\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\equiv (\text{Idempotens}) \\
\neg(\neg p \wedge (\neg p \rightarrow p)) &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
\neg(\neg p \wedge (\neg \neg p \vee p)) &\equiv (\text{Dubbel negation}) \\
\neg(\neg p \wedge (p \vee p)) &\equiv (\text{Idempotens}) \\
\neg(\neg p \wedge p) &\equiv (\text{Inversa lagen}) \\
\neg 0 &\equiv (\text{Def av negation}) \\
1
\end{aligned}$$

(b) Förenkla uttrycket: $(\neg(q \rightarrow r) \rightarrow q)$

$$\begin{aligned}
\neg(q \rightarrow r) \rightarrow q &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
\neg(\neg q \vee r) \rightarrow q &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
\neg\neg(\neg q \vee r) \vee q &\equiv (\text{Dubbel negation}) \\
(\neg q \vee r) \vee q &\equiv (\text{Kommutativa lagen}) \\
(r \vee \neg q) \vee q &\equiv (\text{Associativa lagen}) \\
r \vee (\neg q \vee q) &\equiv (\text{Inversa lagen}) \\
r \vee 1 &\equiv (\text{Dominans}) \\
1
\end{aligned}$$

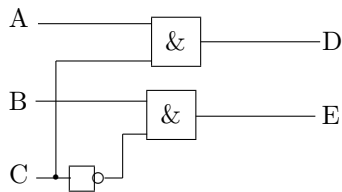
(c) Bevisa att $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ genom att skriva om det högra ledet.

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) &\equiv (\text{Distributiva lagen, } (p \wedge q) \text{ hålls ihop}) \\
((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q) &\equiv (\text{Distributiva lagen}) \\
((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q) &\equiv (\text{Inversa lagarna}) \\
(1 \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q) &\equiv (\text{Identitetslagarna}) \\
(q \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q) &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
(p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q) &\equiv (\text{Distributiva lagen}) \\
(p \rightarrow q) \wedge ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q)) &\equiv (\text{Inversa lagarna}) \\
(p \rightarrow q) \wedge ((\neg q \vee p) \wedge 1) &\equiv (\text{Identitetslagarna}) \\
(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee p) &\equiv (\text{Implikationslagen}) \\
(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) &\equiv (\text{Ekvivalenslagen}) \\
(p \leftrightarrow q) & \\
\text{V.S.V.}
\end{aligned}$$

4. Obligatorisk uppgift.

Låt A, B, C, D och E vara satslogiska variabler. Antag att vi har följande kombinatoriska krets där $\&$ betecknar en AND-gate som representerar en konjunktion av ingångar från vänster, så att utgången på högra sidan är resultatet av konjunktionen.

Den lilla cirkel betecknar negationen av ingången.



Visa att D och E inte kan vara 1 samtidigt genom att logiskt beskriva kretsen.

Lösning:

Vi kan uttrycka D och E med hjälp av A, B, C :

$$D = A \wedge C \text{ samt } E = B \wedge \neg C$$

Låt oss skapa sanningsstabellen för A, B, C, D och E .

A	B	C	$\neg C$	$(A \wedge C)$	$(B \wedge \neg C)$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0

Om vi tittar på sanningstabellen, kan vi se att D och E inte är samtidigt 1.
V.S.V.