

Tentamen i Diskreta strukturer

Kurskod	TDDC75
Datum	2024-10-28
Modul	TEN2

- Ta det lugnt, arbeta metodiskt, kolla dina svar.
- Om något är otydligt eller om du misstänker fel i någon uppgift kontakta jourlärare, Szilvia Varro-Gyapay, 013284092.
- Kom ihåg att svaren på samtliga uppgifter måste **motiveras**, och att motiveringarna skall vara uppställda på ett sådant sätt att det går att följa hur du har tänkt. *Omotiverade svar ger 0 poäng om inget annat sägs.*
- Maxpoäng är 30 poäng. För betyg 3 krävs minst 15 poäng, för betyg 4 krävs 20 poäng och för betyg 5 krävs 25 poäng.

Lycka till!

1. Låt oss modellera ett mini-sudoku-spel där vi har en 2x2-ruta som måste fyllas med 0:or och 1:or så att varje rad och kolumn måste innehålla precis ett 0:a och ett 1:a.

	Kolumn A	Kolumn B	En giltig uppfyllning	
Rad1	A1	B1	1	0
Rad2	A2	B2	0	1

Låt $A1, A2, B1$ och $B2$ vara fyra logiska variabler där de har sanningsvärdet sant om en 1:a står på motsvarande plats och falskt om där står en 0:a.

Betrakta påståendet $F = (A1 \wedge \neg A2) \vee (\neg A1 \wedge A2)$.

- Skapa sanningstabellen för påståendet F .
- När blir F sant enligt spelet? Beskriv med egna ord.
- Formulera ett liknande påstående för $Rad2$.
- Om vi vet sanningsvärdet av $A1$ kan vi bestämma sanningsvärdena för alla andra satsvariabler. Visa genom satslogisk deduktion att om $A1$ är sant då är $A2$ falskt, dvs.
 $A1, F \Rightarrow \neg A2$.
 Använd reglerna från formelbladet.
- Vilken rad i sanningstabellen från uppgift (a) motsvarar fallet i (d)?

(5 poäng)

2. Låt A, B , och C vara tre godtyckliga ICKE-TOMMA mängder. Avgör om följande påståenden stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar.

- $A \cup B = A \cap B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
- $A \in 2^{B \setminus A}$
- $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$
- $|A \cap B| \leq \frac{|A|+|B|}{3}$

(5 poäng)

3. (a) Avgör för relationen nedan om den är reflexiv, transitiv, symmetrisk, eller anti-symmetrisk (flera egenskaper kan vara sanna samtidigt). Det behövs inte fullständiga bevis, men svaren måste motiveras.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R \subseteq A \times A$$

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 4)\}$$

- (b) Beräkna R^+ , dvs. det transitiva höljet av R .

(5 poäng)

4. Låt $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, en funktion som konverterar Celsiusgrader till Fahrenheit, vara definierad enligt $f(c) = \text{FLOOR}(c \cdot \frac{9}{5} + 32)$. (FLOOR avrundar ett tal till största heltalet mindre än eller lika med talet. Var uppmärksam på definitionsmängden och målmängden.)

- (a) Ange värdena $f(-19)$, $f(0)$, $f(1)$ och $f(5)$.
- (b) Är f injektiv?
- (c) Är f surjektiv?
- (d) Är f bijektiv?
- (e) Ge en annan definition av funktionen så att den fortfarande gör konverteringen från Celsius till Fahrenheit men minst en av egenskaperna ovan förändras. Motivera ditt svar.

(5 poäng)

5. Bevisa med hjälp av induktion att summan av de första udda naturliga talen är lika med n^2 , dvs. $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ för alla $n \geq 1$.

(5 poäng)

6. Låt A vara en mängd $A = \{1, 2, 3\}$ och R och S två relationer över $A \times A$:
 $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$, $S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$.
- (a) Visa att både R och S är partialordningar (en relation som är reflexiv, anti-symmetrisk, och transitiv).
 - (b) Skapa sammansättningarna $R \circ S$ och $S \circ R$.
 - (c) Visa att båda sammansättningarna är partialordningar.
 - (d) Finns det två partialordningar T och V över $A \times A$ som gör att deras sammansättning $T \circ V$ inte är en partialordning? T eller V kan vara samma som R eller S .

(5 poäng)

A Formelblad

Regel	Benämning
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Lagen om dubbel negation
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	De Morgans lagar
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Associativa lagarna
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributiva lagarna
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Idempotens
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Identitetslagarna
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Dominans
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Inversa lagarna
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Absorption
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikationslagen
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$	Kontrapositiva lagen
$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekvivalenslagen
$(p \rightarrow q), p \Rightarrow q$	Modus ponens
$(p \rightarrow q), \neg q \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$	Syllogism
$p \wedge q \Rightarrow p$	Konjunktiv förenkling
$p \Rightarrow p \vee q$	Disjunktiv förstärkning
$(p \vee q), \neg q \Rightarrow p$	Disjunktiv syllogism
$p, q \Rightarrow p \wedge q$	Konjunktionsregeln

Tabell 1: Logiska ekvivalenser och konsekvenser