

# TENTAMEN I TDDC75 DISKRETA STRUKTURER

2014-08-30, kl. 8-13, Sal TER1

- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Svaren på samtliga uppgifter *måste motiveras* och motiveringarna ska vara uppställda på sådant sätt att det *går att följa hur du tänkt*. (Ett korrekt svar utan motivering ger i allmänhet ingen poäng.)
- Jour: Christer Bäckström (tel. 0705840889) för diskret matematik och Mattias Krysander (tel. 0732701825) för digitalteknik.
- Visning: Meddelas senare på kurshemsidan.
- Maxpoäng på hela tentamen är 50 poäng. För betyg 3 krävs minst 25 poäng, för betyg 4 minst 34 poäng och för betyg 5 minst 42 poäng.

Lycka till.

## Diskret matematik

1. Definiera den *symmetriska differensen*  $\Delta$  mellan mängder på vanligt sätt, dvs.  $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ , där  $-$  betecknar vanlig mängddifferens). Visa att följande likheter gäller för godtyckliga mängder  $A$  och  $B$ .

(a)  $A\Delta\emptyset = A$

(b)  $A\Delta B = B\Delta A$

(c)  $\overline{A\Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

(5p)

2. Låt  $A$  vara en godtycklig mängd och definiera relationen  $R$  på  $A$  som  $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in A\}$ . Avgör om  $R$  har var och en av följande egenskaper.

(a) Symmetrisk

(b) Antisymmetrisk

(c) Transitiv

(6p)

3. Låt  $\mathbb{R}$  beteckna de reella talen och låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara godtyckliga funktioner. Definiera funktionen  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  så att  $h(x) = f(x) + g(x)$  för alla  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Antag att  $f$  och  $g$  är injektiva. Är då  $h$  injektiv eller ej, eller beror det på valet av  $f$  och  $g$ ?

(b) Antag att  $f$  och  $g$  är surjektiva. Är då  $h$  surjektiv eller ej, eller beror det på valet av  $f$  och  $g$ ?

(6p)

4. Låt  $\Sigma = \{a, b, c\}$  vara ett alfabet och definiera funktionen  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  så att  $f(w) = w \cdot w$  för alla  $w \in \Sigma^*$ . Definiera dessutom följande språk:

- $L_1 = \Sigma^*$
- $L_2 = \{f(w) \mid w \in L_1\}$
- $L_3 = \{f(w) \cdot f(w) \mid w \in L_1\}$
- $L_4 = \{f(f(w)) \mid w \in L_1\}$

Avgör om vart och ett av följande samband gäller:

(a)  $L_1 \subseteq L_2$

(b)  $L_2 \subseteq L_1$

(c)  $L_3 \subseteq L_4$

(d)  $L_4 \subseteq L_3$

(6p)

5. Givet ett positivt heltal  $n$  så betecknar som bekant  $n!$  fakteteten för  $n$  och definieras som  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ . Visa med induktion att  $(n!)^2 \leq (n^2)!$  gäller för alla positiva heltal  $n$ .

(6p)