

Lösningssförslag till matematikdelen på tentamen 2014-10-30 i TDDC75 diskreta strukturer

1. (a) Antag att $B = \emptyset$. Då gäller $A \cup B = A \cup \emptyset = A$ och $A \cap B = A \cap \emptyset = \emptyset$. Villkoret $|A \cup B| \leq 2|A \cap B|$ blir då $|A| \leq 2|\emptyset| = 0$, vilket endast kan gälla om $A = \emptyset$. Av symmetri för union och snitt gäller motsvarande om vi väljer A istället för B som tom mängd. Alltså måste det gälla att antingen både A och B är tomma, eller att ingen av dem är tom.
(b) Välj $B = A$. Vi får då $A \cup B = A \cup A = A$ och $A \cap B = A \cap A = A$. Villkoret blir då att $|A| \leq 2|A|$, vilket gäller för alla mängder A (även tomma mängden).
(c) Vi vet att $|A| = |B| = 10$. Låt $n = |A \cap B|$, dvs. A och B har n gemensamma element. Eftersom A och B vardera måste ha $10 - n$ element som inte är gemensamma så får vi $|A \cup B| = (10 - n) + n + (10 - n) = 20 - n$. Villkoret ger då att $20 - n \leq 2n$, dvs. $20 \leq 3n$. Eftersom n måste vara ett heltal får vi att $n \geq 7$, dvs. A och B måste ha minst 7 gemensamma element.
2. (a) Antag $R \subset Q$ och R reflexiv. Eftersom R är reflexiv så gäller $\langle x, x \rangle \in R$ för alla $x \in A$. Därmed gäller även $\langle x, x \rangle \in Q$ för alla $x \in A$, dvs. Q är reflexiv. Alltså måste Q vara reflexiv om $R \subset Q$ och R reflexiv.
Antag $A \neq \emptyset$. Då finns $\langle x, x \rangle \in R$ för alla $x \in A$ eftersom R är reflexiv. Välj något $x \in A$ och definiera $Q = R \setminus \{\langle x, x \rangle\}$. Då gäller $Q \subset R$, men Q är inte reflexiv. Alltså måste inte Q vara reflexiv om $Q \subset R$ och R reflexiv.
(b) Låt $A = \{1, 2\}$. Välj först $R = \emptyset$ och $Q = \{\langle 1, 2 \rangle\}$. Då är R men inte Q symmetrisk. Det följer att $R \subset Q$ inte garanterar att Q är symmetrisk även om R är symmetrisk. Välj istället $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$. Även då är R symmetrisk, så $Q \subset R$ garanterar inte heller att Q är symmetrisk även om R är symmetrisk.
(c) Låt $A = \{1, 2\}$. Välj $R = \emptyset$ och $Q = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$. Då är R men inte Q antisymmetrisk. Det följer att $R \subset Q$ inte garanterar att Q är antisymmetrisk även om R är antisymmetrisk.

Antag att $Q \subset R$ och R är antisymmetrisk. Antag även att Q inte är antisymmetrisk. Då finns $x, y \in A$ så att $x \neq y$, $\langle x, y \rangle \in Q$ och $\langle y, x \rangle \in Q$. Eftersom $Q \subset R$ måste då även gälla att $\langle x, y \rangle \in R$ och $\langle y, x \rangle \in R$, men det är omöjligt eftersom R är antisymmetrisk. Det följer att $Q \subset R$ garanterar att Q är antisymmetrisk om R är antisymmetrisk.

3. (a) $f(0) = \{0\}$, $f(1) = \{0, 1\}$, $f(2) = \{0, 1, 2\}$ och $f(5) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
 (b) Antag att $f(m) = f(n)$, där $m, n \in \mathbb{N}$. Eftersom $f(m) = \{0, 1, \dots, m\}$ och $f(n) = \{0, 1, \dots, n\}$ måste då gälla att $m = n$. Alltså är f injektiv.
 (c) Låt $S = \{1\}$. Då gäller $S \in 2^{\mathbb{N}}$, men $S \neq f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Alltså är f inte surjektiv.
 (d) Inversen existerar bara om f är bijektiv, vilket kräver att den är både injektiv och surjektiv. Alltså har f ingen invers eftersom den inte är surjektiv.
4. (a) x och y ligger i angränsande länder.
 (b) $x = y$, dvs. x och y är samma land.
 (c) $h(x) = x$, dvs. h är identitetsfunktionen.

5. Visa med induktion över värdet på n att $f(n) \leq n^2$ för alla $n \geq 0$.

Basfall: Basfallet är $n = 0$. Vi får $f(n) = f(0) = 0$ och $n^2 = 0^2 = 0$, dvs. $f(n) \leq n^2$ för $n = 0$.

Induktion: Antag att $f(k) \leq k^2$ för något $k \geq 0$. Vi ska visa att $f(k+1) \leq (k+1)^2$. Vi har

$$f(k+1) = f((k+1) - 1) + (k+1) = f(k) + k + 1$$

enl. def. av f , men $f(k) \leq k^2$ enligt induktionshypotesen så vi får

$$f(k) + k + 1 \leq k^2 + k + 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Det följer att $f(k+1) \leq (k+1)^2$, vilket avslutar induktionen.

Det följer av ovanstående att $f(n) \leq n^2$ för all $n \geq 0$.