Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer
Lösningsförslag

2017-10-18, kl. 8–12

1.
   - Det finns en ton som inte kan spelas av något instrument.
   - Tonen c kan spelas av en fagott.
   - Det finns toner som kan spelas av både Trumpet och Tuba.
   - Det finns fler instrument som kan spela tonen c än som kan spela fyrstrukna d (d^4).
   - Ett piano kan spela fler toner än en trumpet.

2. (a) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$.

   (b) $|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

   (c) $|2^A \times 2^B| = |2^A| \cdot |2^B| = 2^{|A|} \cdot 2^{|B|} = 2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$

   (d) Vi kan börja med att konstatera att $|A \cap B| \leq |A| = 3$ eftersom alla element i $A \cap B$ också är element i A. Vi behöver då visa att det också är möjligt att nå värdet 3. Låt $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{0, 1, 2, 3\}$ då blir $|A \cap B| = |\{0, 1, 2\}| = 3$.

   (e) Vi börjar med att undersöka om 0 är ett möjligt värde. Vi vet att $|B \setminus A| = |\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}|$. För att detta ska bli 0 krävs att $|B| = 0$ eller att varje element i B också är ett element i A. Detta är omöjligt då $|A| < |B|$. Om $A = \{0, 1, 2\}$ och $B = \{0, 1, 2, 3\}$ så blir $|B \setminus A| = |\{3\}| = 1$, vilket därmed är det minsta möjliga värdet.

3. Vi undersöker en egenskap i taget:
   - R är reflexiv eftersom $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$
   - R är symmetrisk eftersom för varje $(x, y) \in R$ så är även $(y, x) \in R$, förutom de fyra element (x, y) där $x = y$ så förekommer $(0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2)$ i R.
   - Sammansättningen $R \circ R = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\} = R$ vilket innebär att för varje par av par $(x, y), (z, w)$ sådana att $y = z$ så finns även $(x, w) \in R$. Alltså är R transitiv.
   - R är inte anti-symmetrisk eftersom $(0, 1) \in R$ och $(1, 0) \in R$.
   - R är inte en partialordning eftersom den inte är anti-symmetrisk.

- R är en ekvivalensrelation eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

4. (a) Av regeln för disjunktiv förstärkning så vet vi att $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee q \vee r)$. Därmed blir $f((p \vee q), (p \vee q \vee r)) = 1$.

   (b) Målmängden för f är $\{0, 1\}$ och vi har redan visat att 1 är ett möjligt värde på f. Kvarstår att hitta två fromler F_1 och F_2 sådana att $f(F_1, F_2) = 0$. Om $F_1 = 1$ och $F_2 = 0$ så är $F_1 \not\Rightarrow F_2$, och därmed $f(F_1, F_2) = 0$. Alltså är f surjektiv.

   (c) $f(0, 1) = 1 = f(0, p)$, men $1 \neq p$. Alltså är f inte injektiv.

   (d) $\{F_i \in F \mid f(1, F_i) = 1\}$ är mängden av alla formler F_i sådana att $1 \Rightarrow F_i$. Det betyder alltså att de är sanna i alla tolkningar då 1 är sant (alltid). Sanningsvärdet för alla F_i är alltså 1. Dessa formler kallas tautologier.

5. Vi visar med induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6.

   - Bassteget: Vi visar att $P(1)$ gäller, dvs att $7^1 - 1$ är jämnt delbart med 6: $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$.
   - Induktionssteget: Anta $P(k)$ för något $k \geq 1$, dvs att $7^k - 1$ är jämnt delbart med 6. Då finns ett heltal m sådant att $7^k - 1 = 6m$. Vi ska nu visa att $P(k+1)$ gäller, dvs att $7^{k+1} - 1$ är jämnt delbart med 6.

     $$7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k - 1 = 7 \cdot 7^k - 7 + 6 = 7(7^k - 1) + 6 = 7 \cdot 6m + 6 = 6(7m + 1)$$

     vilket uppenbart är jämnt delbart med 6.

   Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer $P(n)$ för alla $n \geq 1$, så $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

6. (a) Mängden B innehåller alla element y sådana att $(x, y) \in R$ för något $x \neq y$ (dvs mängden av alla element som "pekas på" av något par i R). $f(A, R) = A \setminus B$ är då mängden av alla element sådana att det inte finns något $x \in A$ (annat y självt) sådant att $(x, y) \in R$. Om R utgör en ordning på A så kan vi kalla dessa de "minsta elementen", eftersom inga element är mindre än dem.

   (b) Ja. Låt $A = 0, 1, 2$ och $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$. Tydligt är att A är icke-tom. Men alla element i A förekommer som den andra delen av ett par i R, alltså blir $f(A, R) = \emptyset$. Generellt gäller detta om det inte finns några minsta element i mängden (med avseende på R). Så för varje element $x_0 \in A$ finns en oändlig (upprepande och nedåtgående) kedja $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ sådan att $x_i \neq x_{i+1}$, och $(x_{i+1}, x_i) \in R$.