Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2017-01-05, Lösningsförslag (med reservation för eventuella fel)

1. Betrakta följande satslogiska uttryck: $(p \to q) \lor (q \to p)$

   (a) Visa genom naturlig deduktion att uttrycket är en tautlogi. Använd endast lagarna i formelbladet sist i tentan.

   (b) Gäller påståendet: $0 \models (p \to q) \lor (q \to p)$?

   (c) Gäller påståendet: $(p \to q) \lor (q \to p) \models 0$?

   5

   Lösning

   (a) Bevis för att $(p \to q) \lor (q \to p)$ är en tautologi, dvs att $(p \to q) \lor (q \to p) \models 1$

(1)	$(p \to q) \lor (q \to p)$	(Premiss)
(2)	$(\neg p \lor q) \lor (q \to p)$	(1) och implikatationslagen
(3)	$(\neg p \lor q) \lor (\neg q \lor p)$	(2) och implikationslagen
(4)	$(\neg p \lor p) \lor (\neg q \lor q)$	(3) och associativa lagarna
(5)	$1 \lor (\neg q \lor q)$	(4) och invera lagen
(6)	1	(5) och dominans

   (b) $F_1 \models F_2$ är sant om F_2 är sant för varje tolkning där F_1 är sann. Eftersom det inte finns några tolkningar som gör 0 sann så är påståendet sant.

   (c) Det finns tolkningar som gör $(p \to q) \lor (q \to p)$ sann (alla tolkningar), men inga som gör 0 sann. Alltså stämmer inte påståendet.

2. Låt A och B vara två godtyckliga icke-tomma mängder. Avgör om följande påståenden är stämmer alltid, aldrig, eller ibland (för vissa mängder). Glöm inte att motivera ditt svar.

   (a) $A \in B$

   (b) $(A \cap B) \subseteq B$

   (c) $\forall x \in A[x \notin B] \to (B \subseteq A)$

   (d) $(A \cup B) \cap \overline{B} = A$

   (e) $|A \cup B| = |A| + |B|$

   (5 poäng)

Lösning

(a) Låt $A = B = \{0\}$, då gäller inte påståendet. Men låt $A = \{0\}$ och $B = \{\{0\}\}$ då gäller $A \in B$. Alltså gäller påståendet ibland.

(b) Det finns två fall: (1) A och B är disjunkta, $(A \cap B) = \emptyset$, och då stämmer påståendet ty alla mängder har tomma mängden som delmängd, eller (2) $(A \cap B) \neq \emptyset$, låt x vara ett godtyckligt element i $(A \cap B)$. Från definitionen av snitt vet vi att $x \in A$ och $x \in B$. Alltså är alla element i $(A \cap B)$ också element i B. Påståendet stämmer alltid.

(c) Påståendet gäller inte alltid (tex om $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$). Men om förledet är falskt (tex i fallet $A = B = \{0\}$ så är påståendet sant. Påståendet gäller ibland.

(d) $(A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B} = A \setminus B$. Så om exvis $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$ så stämmer påståendet, men om $A = B = \{0\}$ så stämmer det inte. Påståendet stämmer ibland.

(e) $|A \cup B| = |A| + |B|$. Detta påståendet stämmer endast om $A \cap B = \emptyset$ (till exempel $A = \{0\}$ och $B = \{1\}$), men inte för $A = B = \{0\}$

3. Datalösningar AB har fått i uppdrag att skapa ett system för att hantera elektroniska patientjournaler till Region Mellanland. Systemet representerar data som ett antal mängder, relationer, och funktioner i en databas, som bland annat innehåller:

   - Mängden patienter P
   - Mängden vårdinrättningar V
   - En funktion $f_i : P \to V$ som anger vilken vårdinrättning en patient är inskriven på.
   - Mängden av diagnoser D.
   - En relation $R \subseteq P \times D$ sådan att $(p, d) \in R$ omm patient p har diagnosen d.
   - En funktion $f_a : P \to \{0, 1, 2, 3\}$ som för varie patient anger hur allvarligt dennes tillstånd är (0 är minst allvarligt, och 3 är mest allvarligt) för att kunna prioriteras till exempel på en akutmotagning.

   Ange för varje relation nedan en tolkning vad den betecknar och ange om den är: reflexiv, transitiv, symmetrisk, antisymmetrisk, en partialordning, en ekvivalensrelation.

   (a) $S = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid f_i(p_1) = f_i(p_2)\}$.

   (b) $T = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid \exists d \in D[(p_1, d) \in R \land (p_2, d) \in R]\}$.

   (c) $U = \{(p_1, p_2) \in P \times P \mid f_a(p_1) \leq f_a(p_2)\}$.

   (6 poäng)

   Lösning

   (a) Relationen S innehåller alla patientpar som har samma vårdinrättning.

   - Reflexiv: $(p, p) \in S$ eftersom $f_i(p) = f_i(p)$ för alla $p \in P$.
   - Transitiv: om $f_i(p_1) = f_i(p_2)$ och $f_i(p_2) = f_i(p_3)$, så måste $f_i(p_1) = f_i(p_3)$
   - Symmetrisk: om $(p_1, p_2) \in S$ så gäller $f_i(p_1) = f_i(p_2)$, alltså är även $(p_2, p_1) \in S$
   - Inte antisymmetrisk: Låt p_1 och p_2 vara två olika patienter med samma vårdinrättning, då gäller $(p_1, p_2) \in S$, men $p_1 \neq p_2$

   Eftersom S är reflexiv, transitiv och symmetrisk så är S en ekvivalensrelation. Eftersom den inte är antisymmetrisk är det inte en partialordning.

   (b) Relationen T innehåller alla patientpar som har samma diagnos.

   - Inte reflexiv: Om $R = \emptyset$ men $p \in P$ så finns det ingen diagnos för p och $(p, p) \notin T$

- Inte transitiv: Låt $R = \{(p_1, d_1), (p_2, d_1), (p_2, d_2), (p_3, d_2)\}$ då blir $T = \{(p_1, p_2), (p_2, p_3)\}$, och eftersom $(p_1, p_3) \notin T$ så gäller inte transitivtet.
- Symmetrisk: om $(p_1, p_2) \in T$ så finns en diagnos d så att $(p_1, d) \in R$ och $(p_2, d) \in R$, alltså gäller också $(p_2, p_1) \in T$
- Inte antisymmetrisk: Låt p_1 och p_2 vara två olika patienter med samma diagnos, då gäller $(p_1, p_2) \in T$, men $p_1 \neq p_2$

T är varken en ekvivalensrelation eller partialordning eftersom den inte är reflexiv.

(c) Relationen U innehåller patientpar (p_1, p_2) där tillståndet för p_2 är minst lika allvarligt som för p_1

- Reflexiv: $(p, p) \in S$ eftersom $f_a(p) \leq f_a(p)$ för alla $p \in P$.
- Transitiv: om $f_i(p_1) \leq f_i(p_2)$ och $f_i(p_2) \leq f_i(p_3)$, så måste $f_i(p_1) \leq f_i(p_3)$
- Inte symmetrisk: anta att $f_a(p_1) = 0$ och $f_a(p_2) = 1$ då gäller $(p_1, p_2) \in U$ men $(p_2, p_1) \notin U$
- Inte antisymmetrisk: Låt p_1 och p_2 vara två olika patienter med lika allvarligt tillstånd, då gäller $(p_1, p_2) \in S$, men $p_1 \neq p_2$

U är varken en evikvalensrelation eller partialordning eftersom den inte är symmetrisk eller antisymmetrisk.

4. Visa med hjälp av induktion att $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6 för alla heltal $n \geq 1$.

5

Lösning Vi visar med induktion. Låt $P(n)$ vara påståendet att $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6.

- Bassteget: Vi visar att $P(1)$ gäller, dvs att $7^1 - 1$ är jämnt delbart med 6: $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$.
- Induktionssteget: Anta $P(k)$ för något $k \geq 1$, dvs att $7^k - 1$ är jämnt delbart med 6. Då finns ett heltal m sådant att $7^k - 1 = 6m$. Vi ska nu visa att $P(k + 1)$ gäller, dvs att $7^{k+1} - 1$ är jämnt delbart med 6.

  $$7^{k+1}-1 = 7{\cdot}7^k-1 = 7{\cdot}7^k-7+6 = 7(7^k-1)+6 = 7{\cdot}6m+6 = 6(7m+1)$$

  vilket uppenbart är jämnt delbart med 6.

Av bassteget, induktionssteget och induktionsprincipen följer $P(n)$ för alla $n \geq 1$, så $7^n - 1$ är jämnt delbart med 6 för $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. Låt A och B vara godtyckliga mängder. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska och antingen bevisa eller motbevisa påståendena (symbolen $\setminus$ betecknar mängddifferens).

   (a) $A \setminus B = \overline{B \setminus A}$

   (b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$

(4 poäng)

Lösning

(a) Motbevis: Låt $A = B = \emptyset$. Då är $A \setminus B = \emptyset$, men $\overline{B \setminus A} = \overline{\emptyset} = \mathcal{U}$.

(b) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) = (A \cap \overline{A}) \cap (B \cap \overline{B}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

6. En enkel tillståndsmaskin (utan sluttillstånd) kan beskrivas som en fyrtupel (Σ, S, s_o, T) där Σ är ett alfabet med möjlig indata, S är mängden av tillstånd, $s_0 \in S$ är initialtillståndet, och $T : S \times \Sigma \to S$ är överföringsfunktionen som för varje tillstånd och ett indata anger nästa tillstånd.

   (a) Eftersom en funktion är ett specialfall av en relation, vilket är en mängd av par så kan vi betrakta kardinaliteten av T, dvs $|T|$. Beskriv $|T|$ med hjälp av $|\Sigma|$ och $|S|$.

   (b) Låt $R \subseteq S$ vara mängden av tillstånd som är nåbara från initialtillståndet. Uttryck R med hjälp av Σ, S, s_o, T.

   (c) Låt $\Sigma = \{0, 1\}$, och $S = \{s_0, s_1\}$. Ange en möjlig funktion T, och rita upp den resulterande tillståndsmaskinen.

(5 poäng)

Lösning En enkel tillståndsmaskin (utan sluttillstånd) kan beskrivas som en fyrtupel (Σ, S, s_o, T) där Σ är ett alfabet med möjlig indata, S är mängden av tillstånd, $s_0 \in S$ är initialtillståndet, och $T : S \times \Sigma \to S$ är överföringsfunktionen som för varje tillstånd och ett indata anger nästa tillstånd.

(a) T består av $|S| \cdot |\Sigma|$ element, eftersom den mappar varje möjligt par av tillstånd och indata till ett nytt tillstånd.

(b) Vi börjar med att skapa en relation av T som är oberoende av indatat. Låt relationen $U = \{(s_i, s_j) \in S \times S \mid \exists a \in \Sigma[T(s_i, a) = s_j]\}$. Om vi nu betraktar det transitiva höljet U^* så betecknar det alla par (s_i, s_j) där s_j är nåbar från s_i. Vi kan nu uttrycka $R = \{s \in S \mid (s_0, s) \in U^*\}$.

(c) Vi kan till exempel låta $T = \{(s_0, 0) \mapsto s_0, (s_0, 1) \mapsto s_1, (s_1, 0) \mapsto s_0, (s_1, 1) \mapsto s_1)\}$, vilket vi kan rita som en tillståndsmaskin.