

Tentamen i TDDC75 Diskreta strukturer

2016-08-27: Lösningsförslag

1. (a) $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3, 4, 6\} \cap \{1, 6\} = \{6\}$
(b) $|2^A| = 2^3 = 8$, eftersom A innehåller 3 element så innehåller potensmängden 2^A : $2^3 = 8$ element
(c) $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$, eftersom kardinaliteten av kartesiska produkten av två mängder är produkten av kardinaliteten hos de ingående mängderna
(d) $2^{A \cap B} = 2^{\{1,2,5\} \cap \{2,3,4,5\}} = 2^{\{2,5\}} = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2, 5\}\}$
(e) $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 5\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$
2. (a) Det reflexiva höljet definieras som $R^0 \cup R$, där R^0 motsvarar identitetsrelationen. I detta fall alltså $R^0 \cup R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \cup \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
(b) Det symmetriska höljet definieras som $R \cup R^{-1}$, där R^{-1} motsvarar inversen till R . I detta fall alltså: $R \cup R^{-1} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\} \cup \{(2, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 3), (4, 4)\} = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$
(c) Det transitiva höljet definieras som $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$. Vi söker således först R^n för alla $n \geq 1$:
 - $R^1 = R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$
 - $R^2 = R \circ R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
 - $R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
 - $R^4 = R^3 \circ R = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\} = R^3$
 - Alltså är $R^n = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$ för alla $n \geq 3$Vi kan nu se att $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$
3. Antag att $f : A \rightarrow B$ och $g : B \rightarrow C$. Visa eller motbevisa följande påståenden
 - (a) Om $g \circ f$ är surjektiv så måste f och g vara surjektiva.
Motbevis: Låt $A = \{0, 1\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$, och låt $f = \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 3\}$, $g = \{2 \mapsto 5, 3 \mapsto 6, 4 \mapsto 6\}$. Sammansättningen $g \circ f = \{0 \mapsto 5, 1 \mapsto 6\}$ är uppenbart surjektiv. Dock är f i detta exempel inte surjektiv.
 - (b) Om f och g är surjektiva så måste $g \circ f$ vara surjektiv. *Bevis:* Låt z vara godtyckligt element i C . Eftersom g är surjektiv vet vi att det

existerar ett element $y \in B$ sådant att $g(y) = z$. Dessutom vet vi att f är surjektiv, vilket innebär att det existerar ett element $x \in A$ sådant att $f(x) = y$. Vi har alltså visat att för godtyckligt element $z \in C$ så existerar element $x \in A$ och $y \in B$ sådana att $f(x) = y$ och $g(y) = z$. Alltså $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$, vilket visar att $(g \circ f)$ är surjektiv.

- (c) Om $g \circ f$ är injektiv så måste f och g vara injektiva. *Motbevis:* Låt $A = \{0\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}, f = \{0 \mapsto 2\}, g = \{1 \mapsto 3, 2 \mapsto 3\}$. Sammansättningen $(g \circ f) = \{0 \mapsto 3\}$ är injektiv, men g är inte injektiv eftersom $g(1) = g(2)$.

4. Visa med hjälp av induktion att varje heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal.

Bevis:

Påståendet $P(n)$: alla heltal $2 \leq x \leq n$ kan skrivas som en produkt av primtal.

Bassteg $P(2)$

$P(2)$ är sant eftersom $2 = 2$ och 2 är ett primtal.

Induktionssteg:

Antag att för något heltal k så gäller $P(k)$, det vill säga att för alla x ($2 \leq x \leq k$), så kan vi skriva $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, där p_i är primtal. Vi ska nu visa att $P(k+1)$. Enligt induktionsantagandet gäller att alla $2 \leq x \leq k$ kan skrivas som produkt av primtal, så det återstår bara att visa att $k+1$ också kan skrivas som en produkt av primtal. Det finns två fall att analysera, antingen är $k+1$ ett primtal eller inte.

Fall 1: $k+1$ är ett primtal, i detta fall kan $k+1$ skrivas som en produkt av primtal, eftersom talet självt är ett primtal.

Fall 2: $k+1$ är inte ett primtal, detta betyder att $k+1$ kan skrivas som en produkt $k+1 = a \cdot b$ där a och b är positiva heltal $2 \leq a \leq k, 2 \leq b \leq k$. Men enligt induktionsantagandet kan a och b skrivas som produkter av primtal, $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_n, b = p'_1 \cdot \dots \cdot p'_m$. Alltså kan vi skriva $k+1 = a \cdot b = p_1 \cdot \dots \cdot p_n \cdot p'_1 \cdot \dots \cdot p'_m$

Alltså har vi visat att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Enligt basfallet och principen om matematisk induktion gäller alltså $P(n)$ för alla $n \geq 2$. VSV

5. (a) Ja, $\{X_1, \dots, X_m\}$ kan vara en partition på X . Låt $X = \{x_1, x_2\}, Y = \{y_1, y_2\}$ och nätet vara definierat som $\langle y_1, y_2 \rangle = f(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$. Då är $X_1 = \{x_1\}$ och $X_2 = \{x_2\}$. Mängden $\{X_1, X_2\} = \{\{x_1\}, \{x_2\}\}$ är en partition på X eftersom den består av icke-tomma disjunkta mängder vars union är X . Men antag istället att $f(x_1, x_2) = \langle x_1 \wedge x_2, x_2 \rangle$, då är $X_1 = \{x_1, x_2\}$, och $X_2 = \{x_2\}$ så X_1 och X_2 är inte disjunkta, och $\{X_1, X_2\}$ är då inte en partition.
- (b) $f(x_1, \dots, x_n) = \langle y_1, \dots, y_m \rangle = \langle f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \rangle$

- (c) Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$ som beskriver nätet kan vara en bijektion. Vi vet två mängder A och B har samma kardinalitet om och endast om det existerar en bijektion $g : A \rightarrow B$. Alltså måste $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}^m|$ gälla för att f ska vara en bijektion, vilket medför att $n = m$. Det enklaste exemplet på bijektion är identitetsfunktionen, dvs $f(x_1, \dots, x_n) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.